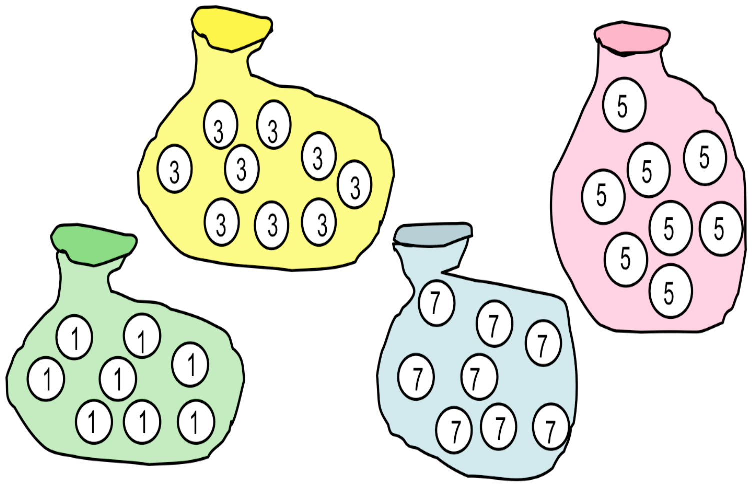
# Padrões e Resolução de Problemas

## Sacos de berlindes

Maria Helena Martinho

# Sacos de berlindes

Em cada saco há uma grande quantidade de berlindes numerados. Como tirar 10 berlindes de modo a que a soma dos números seja 37 ?



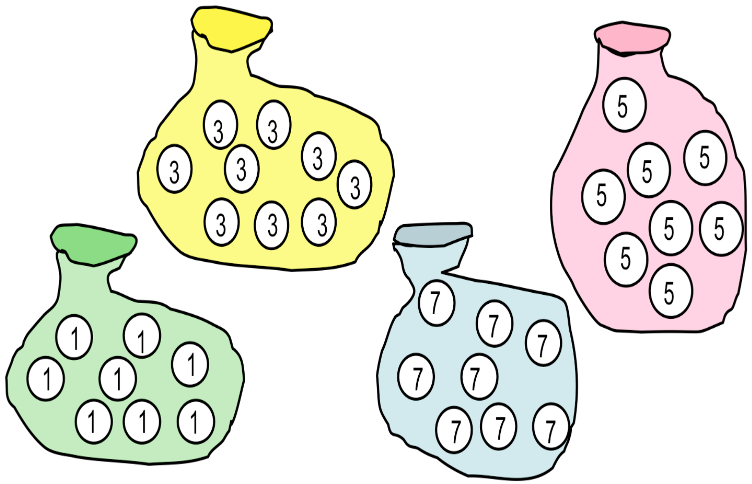
Fizemos muitas experiências. Por exemplo:
34= 7+5+5+5+3+3+3+1+1+1 (10 números)
36= 5+5+5+5+5+3+3+3+1+1 (10 números)
38= 1+1+1+3+3+5+5+5+7+7 (10 números)
37 = 5+5+5+5+5+5+3+3+1 (9 números)
37= 5+5+5+5+5+7+1+1+3 (9 números)
37= 5+5+5+5+5+3+3+3+1+1+1 (11 números)
Não conseguimos chegar a 37 com 10 números. O problema não se pode resolver.

**Resolução do Ricardo e da Helena**

Formação (Santos, Boavida, Oliveira& Carreira, 2008)

# Sacos de berlindes

Em cada saco há uma grande quantidade de berlindes numerados. Como tirar 10 berlindes de modo a que a soma dos números seja 37 ?



Primeiro fizemos experiências e não conseguimos. Depois olhámos melhor para os números dos sacos e descobrimos que eram todos ímpares.

Sabemos que se somarmos dois números ímpares quaisquer vamos obter sempre um número par como, por exemplo, 9+7=16.

Portanto, se tivermos uma combinação par de números ímpares, obtemos sempre como resposta um número par, como por exemplo 7+1+5+9 = 22.

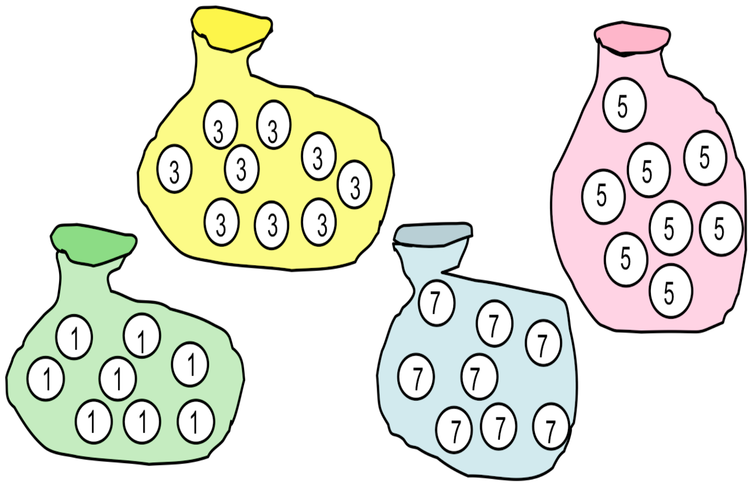
É impossível obter 37 a partir de 10 números ímpares porque 10 é um número par e 37 é um número ímpar.

Resolução do Tomás e da Matilde

Formação (Santos, Boavida, Oliveira& Carreira, 2008)

# Sacos de berlindes

Em cada saco há uma grande quantidade de berlindes numerados. Como tirar 10 berlindes de modo a que a soma dos números seja 37 ?



Fizemos muitas experiências. Por exemplo:

34= 7+5+5+5+3+3+3+1+1+1 (10 números)

36= 5+5+5+5+5+3+3+3+1+1 (10 números)

38= 1+1+1+3+3+5+5+5+7+7 (10 números)

37 = 5+5+5+5+5+5+3+3+1 (9 números)

37= 5+5+5+5+5+7+1+1+3 (9 números)

37= 5+5+5+5+5+3+3+3+1+1+1 (11 números)

Não conseguimos chegar a 37 com 10 números. O problema não se pode resolver.

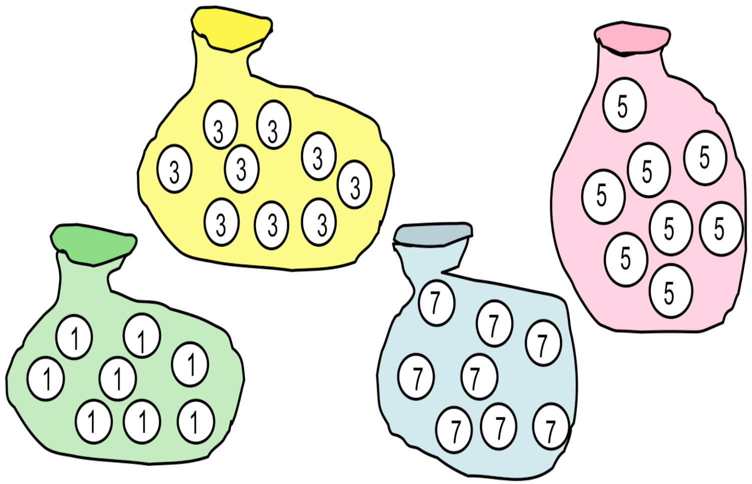
**Resolução do Ricardo e da Helena**

**Explicaram** o raciocínio e afirmaram que não se pode resolver

Formação (Santos, Boavida, Oliveira& Carreira, 2008)

# Sacos de berlindes

Em cada saco há uma grande quantidade de berlindes numerados. Como tirar 10 berlindes de modo a que a soma dos números seja 37 ?




Primeiro fizemos experiências e não conseguimos. Depois olhámos melhor para os números dos sacos e descobrimos que eram todos ímpares.

Sabemos que se somarmos dois números ímpares quaisquer vamos obter sempre um número par como, por exemplo, 9+7=16.

Portanto, se tivermos uma combinação par de números ímpares, obtemos sempre como resposta um número par, como por exemplo 7+1+5+9 = 22.

É impossível obter 37 a partir de 10 números ímpares porque 10 é um número par e 37 é um número ímpar.

Resolução do Tomás e da Matilde

**Justificaram** matematicamente a impossibilidade de resolução

Formação (Santos, Boavida, Oliveira& Carreira, 2008)

# Explicar, justificar e provar

Explicar — pretende fazer com que os outros compreendam nosso raciocínio e do que estamos convencidos ser verdade

Justificar — explicitamos as razões por que consideramos que é verdade

Provar — convencemos os outros de que o que dizemos é mesmo verdade

# Algumas respostas

Cuidado com o que escrevem!

3º passo: Conclusão.

Após diversas tentativas, verificamos que só conseguíamos obter a soma 37, recorrendo a 9, 11, 13... berlindes.
Ou seja, só conseguimos obter a soma 37, apenas com um ímpar de berlindes.

Em suma, constamos que não existe solução possível, dado que a soma de números ímpares resulta num número par.

Exemplo: $1 + 1 = 2$

$3 + 3 = 6$

$37 + 37 = 74$

Justificação muito incompleta e com falhas. Os exemplos para essa explicação são pobres, correspondem sempre ao dobro de um número!

$1+1=2x1$

$3+3=2x3$

$37+37=2x37$

# Algumas respostas

Calculámos a soma dos algarismos dos berlindes de cada saco.

A nossa primeira opção foi fazer tentativas erro. Assim, concluímos que a soma de dez algarismos ímpares, vai dar sempre um resultado par. ⊛

Sabemos que o algarismo das unidades define se o número é par (0, 2, 4, 6, 8) ou ímpar (1, 3, 5, 7, 9), independentemente das classes do número.

⊛ Esta conclusão foi achada da seguinte forma:

1+1 = 2 → nº par    5+5 = 10 → nº par    9+9 = 18 → nº par

3+3 = 6 → nº par    7+7 = 14 → nº par

Após este raciocínio, vimos que se o número de parcelas somadas for par, o resultado será sempre par, independentemente de os números das parcelas serem todos ímpares ou todos pares.

Logo, ao extrairmos 10 (nº par) berlindes com números ímpares, percebemos que o resultado não poderia ser 37, pois este é um número ímpar e, segundo o que vimos anteriormente, o resultado teria de ser par.

Sempre com a repetição de números! Pouco genérico. DOBRO!

Al

1º tentativa: 3+3+3+7+7+5+5+1+1+1 = 36 X

2º tentativa: 3+3+3+3+3+5+5+5+5+1+1 = 37 X

Chegamos à conclusão que este problema não tem resolução, pois sabemos que a fórmula para obtermos um número par é 2n, enquanto que a fórmula para obtermos um número impar é 2n+1. Assim, sabemos que a soma de:

2 números impares = número par;
3 números impares = número impar;
4 números impares = número par;
5 números impares = número impar;
6 números impares = número par;
7 números impares = número impar;
8 números impares = número par;
9 números impares = número impar;
10 números impares = número par.

R: Ao somar 10 números impares, concluímos que o seu resultado tem de ser um número par. Sendo 37 um número impar é impossível resolver o problema.

$$\begin{array}{r|l} 37 & 2 \\ \hline 17 & 18 \\ 1 & \end{array}$$

Vários elementos introduzidos que poderiam ser considerados mas que se perdem: 2n+1

Isto foi para mostrar que é ímpar? Mas, não é dito!

# Algumas respostas

Podemos observar que todos os números dos sacos são ímpares e sabendo que a soma de dois números ímpares dá sempre número par.

$$\left.\begin{array}{l} \underline{3}+\underline{7}=10 \\ \underline{7}+\underline{5}=12 \\ \underline{3}+\underline{1}=4 \\ \underline{1}+\underline{5}=6 \\ \underline{1}+\underline{7}=8 \end{array}\right\} \text{2 parcelas}$$

$$3+7+5=15$$

$$\underbrace{1+3\ +5=9}_{\text{3 parcelas}}$$

Provaram?

Com isto provamos que duas parcelas com número ímpar dá número par e três parcelas com número ímpar dá número ímpar. Logo com 10 parcelas o resultado seria número par.

O problema apresentado pede que o resultado da soma seja 37 por isso teríamos de ter um número de parcelas ímpar.

Por esta razão a resolução deste exercício torna-se impossível.

Grande salto!

# Algumas respostas

Após uma reflexão e várias tentativas erro, o nosso grupo concluiu que a resolução deste problema é impossível.

Pois sabemos que da soma de um conjunto par de números ímpares resulta um número par e da soma de um conjunto ímpar de números ímpares resulta um número ímpar.

Como concluiram isso? Conseguem provar?

Assim, como 10 é um número par, da soma de um conjunto de 10 números ímpares vai resultar um número par. Logo, será impossível obtermos o número 37, por este ser um número ímpar.

# Algumas respostas

Assim, a nossa segunda tentativa iniciou-se na observação dos resultados obtidos. Reparamos que todas as bolas possuíam números ímpares (1, 3, 5 e 7) e que a soma dos números teria de resultar num número ímpar (37). Percebemos, assim, que ao somarmos dois números ímpares obteríamos um número par. Concluímos, então, que para obter um número ímpar, teríamos de somar um número ímpar e um número par. Porém, todos os números eram ímpares e, deduzimos, que para a soma ser um número ímpar teríamos de somar três números ímpares.

Decidimos criar um esquema:

__ __ __ | __ __ __ | __ __ __ | __ } 10 bolas

A soma dos três números dá resultado ímpar

A soma dos três números dá resultado ímpar

A soma dos três números dá resultado ímpar

A soma destes seis números dá resultado par

A soma dos nove números dá resultado ímpar

Teria de ser par

# Algumas respostas

Decidimos criar um esquema:

10 bolas

A soma dos três números dá resultado ímpar

A soma dos três números dá resultado ímpar

A soma dos três números dá resultado ímpar

A soma destes seis números dá resultado par

A soma dos nove números dá resultado ímpar

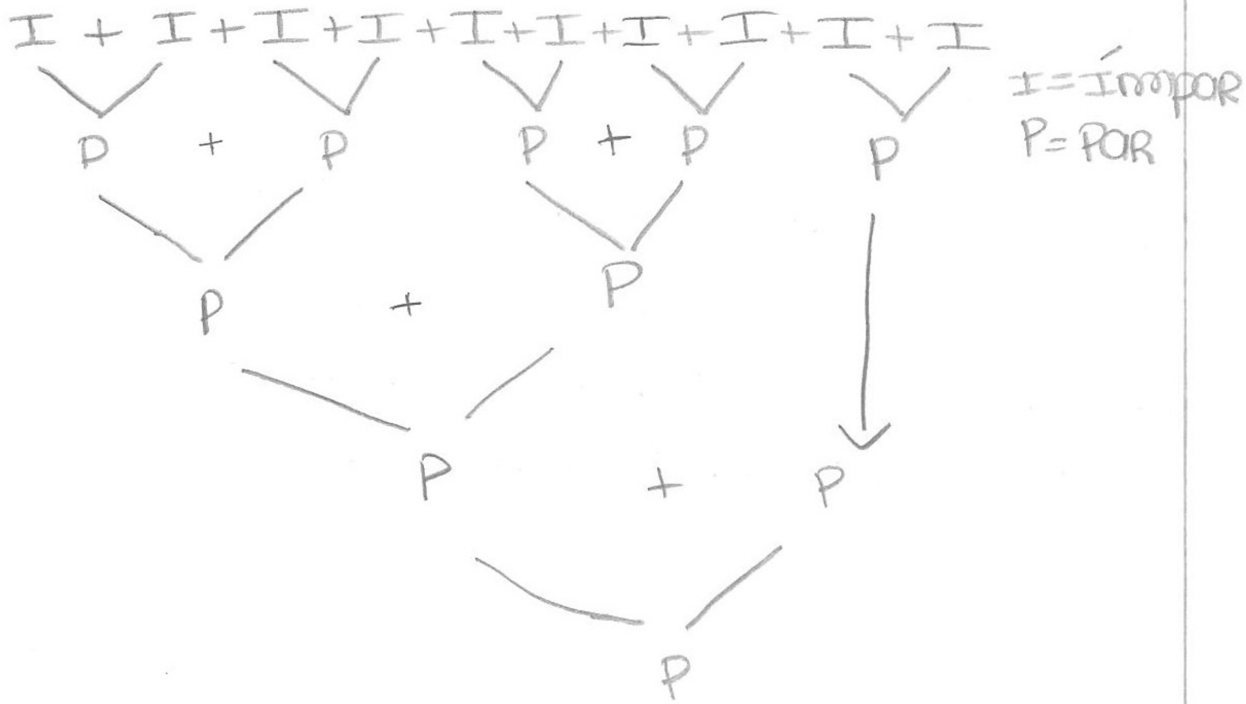
Teria de ser par

Através do esquema, entendemos que a soma de nove algarismos dá sempre resultado ímpar. Desta forma, a décima bola teria de apresentar um número par. Pois, como dito anteriormente, a soma de um número par com um número ímpar, resulta num número ímpar.

A partir desta observação e não existindo bolas pares em nenhum dos sacos, concluímos que a solução do problema é que não existe forma de retirar 10 bolas, de modo a que a soma seja 37.

# Algumas respostas

Partindo do pressuposto que a soma de dois números ímpares resulta sempre num número par, construímos um diagrama com base em 10 berlindes ímpares.




Chegamos assim à conclusão que a soma de 10 números ímpares resulta num número par. Sendo impossível obter o resultado 37, pois este é um número ímpar.

# Algumas respostas

1 + 3 + 3 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 37 (9 berlindes)

3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 5 + 5 + 7 = 38 (10 berlindes)

1 + 1 + 1 + 1 + 5 + 3 + 3 + 7 + 7 + 7 = 36 (10 berlindes)

...

Ao fim de algumas tentativas falhadas, começamos a perceber que se trata de um problema impossível de resolver considerando:

- 37 é um número ímpar;
- 10 é um número par;
- a soma de dois números ímpares dá sempre um número par.

Logo, a soma consecutiva de dez números ímpares dá sempre um número par e 37 é ímpar.

Explicação com pouca força, incompleta dado que não fundamenta nada

# Algumas respostas

**Raciocínio:**

10 parcelas numéricas

Números possíveis utilizar: 1,3,5 e 7.

Nº ímpar → fórmula: 2n+1

Genericamente, tendo 2 números quaisquer ímpares, 2x+1 e 2y+1, a soma resulta em:

$2x+1 + 2y + 1$

$=2x + 2y + 2$

$= \underline{2}\,(x + y +1)$

Qualquer número multiplicado por 2 é sempre um número par.

Provam que a soma de dois númeors ímpares dá um número par. No entanto, aqui não se trata apenas da soma de dois números!

Como todos os números fornecidos são ímpares (1, 3, 5, 7) não é possível que a sua soma seja 37 (nº ímpar).

# Algumas respostas

Inicialmente, multiplicamos o número de brindes em cada saco pelo número do brinde daquele saco, por exemplo, para o saco 7 → 7x8=56 e depois somamos o total de cada saco que deu um total de 131.

Salto!

Para comprovar que, neste caso específico, a soma de um número ímpar com um número ímpar vai dar sempre número par, elaboramos uma tabela modelo.

| + | 1 | 3 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 | 6 | 8 |
| 2 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 3 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| 4 | 5 | 7 | 9 | 11 |
| 5 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| 6 | 7 | 9 | 11 | 13 |
| 7 | 8 | 10 | 12 | 14 |
| 8 | 9 | 11 | 13 | 15 |
| 9 | 10 | 12 | 14 | 16 |
| 10 | 11 | 13 | 15 | 17 |

U= {1,3,5,7}

Berlindes= 10

Como concluíram?

A soma de número par de parcelas ímpares vai dar sempre resultado da adição par. Logo, é impossível retirarmos 10 berlindes, sendo eles de número ímpar (1,3,5,7), e obtermos como resultado da adição o número 37.

Qualquer par= 2n

Qualquer ímpar= 2n+1

Ao longo do raciocínio deste problema surgiram diferentes interpretações, sendo que uma delas daria para formular um novo problema:

Em cada saco há uma grande quantidade de berlindes numerados. Como tirar 10 berlindes de modo a que a soma dos números dos berlindes seja 94?

Extensão ao problema, mas menos exigente

Para resolvermos o problema realizamos várias tentativas. No entanto, não conseguimos alcançar o valor pretendido. Sempre que juntamos 10 berlindes obtemos um número par e o 37 é um número ímpar. Para alcançar este valor teríamos que, ou acrescentar mais um berlinde aos 10 pretendidos ou utilizar menos um berlinde.

Chegamos a esta conclusão através da tentativa erro:
--> 1+1+1+3+5+5+7+7+7= 37, no entanto não usamos 10 berlindes mas 9
--> 1+1+1+3+3+3+3+5+5+5+7= 37, no entanto usamos 11 berlindes e não 10
--> 1+1+1+3+5+5+7+7+7+1= 38, aqui usamos os 10 berlindes mas o valor foi superior a 37
--> 1+1+3+3+3+3+5+5+5+7= 36, mais uma vez usamos 10 berlindes mas o valor foi inferior a 37
--> 1+1+1+3+3+5+5+5+7+7=38, novamente, usamos os 10 berlindes mas alcançamos um número superior a 37
--> entre várias outras tentativas de cálculo mental

Assim sendo, determinamos que, de todas as tentativas que fizemos sempre que usamos 10 berlindes, obtivemos um número par. Deste modo, só conseguimos obter a soma 37 retirando um número ímpar de berlindes, como podemos observar no exemplo acima onde só retirando 9 ou 11 berlindes obtivemos o número pretendido. Para além disso, os números apresentados em cada saco são todos ímpares e primos e, devido a isso, é impossível decompô-los (Exemplo: 5 é impossível dividir por quaisquer outro dos números daqueles que aparecem nos sacos).
Posto isto, concluimos que seria impossível a soma dos valores de 10 berlindes dar 37.

Escrita clara.

Mas… precisa de avançar para a justificação

# Algumas respostas

Após várias tentativa-erro concluímos que a resolução da tarefa 4 torna-se impossível quando não temos acesso a nenhum berlinde que tenha número inteiro par. Parando para pensar, usando só números ímpares, a soma de quaisquer desses números é, sempre, um número par.

Assim, poderíamos usar quaisquer dez números inteiros ímpares que o resultado seria sempre um número inteiro par, abaixo ou acima do número ímpar pretendido.

Para melhor exemplificar temos os seguintes exemplos das nossas tentativas-erro:

Número pretendido = 37

Tentativa 1 - 5+5+7+7+3+3+3+1+1+1=36

Tentativa 2 - 5+5+7+7+3+3+3+3+1+1=38

Explicado para uma soma com 10 parcelas ímpares

# Algumas respostas

2.º passo: De seguida, apercebemo-nos de que as sucessivas somas davam sempre número par e de que precisaríamos de um número par para obter a soma 37.

A partir daí, relembramos as fórmulas relativas aos números pares e ímpares.

N.º par: $2m$.
N.º ímpar: $2m+1$.

Sabemos que a soma de dois números ímpares dá número par, pois:

N.º ímpar + N.º ímpar

$(2m+1) + (2x+1) = 2m + 2x + 2$ (par) → qualquer número multiplicado por 2 será par.

Partindo ~~deste~~ desse pressuposto e sabendo que o n.º de todos os berlindes é ímpar, formulamos o seguinte raciocínio:

I (ímpar)

P (par)

$$\underbrace{I + I}_{P} + \underbrace{I + I}_{P} + \underbrace{I + I}_{P} + \underbrace{I + I}_{P} + \underbrace{I + I}_{P}$$

$$P + P + P + P + P$$

Conclusão: Por observação do raciocínio anterior, facilmente percebemos que não seria possível obter a soma 37 (ímpar), pois a soma de dez números ímpares corresponde sempre a um número par.

Explicado para uma soma com 10 parcelas ímpares

Nesta tarefa começamos por pensar numa estratégia individualmente. Após isso tentamos resolver a questão com a lógica da tentativa erro. Assinalámos 10 espaços aos quais correspondia os berlindes que iriamos tirar de modo a obtermos o valor 37.

Algumas das tentativas:

7 5 5 5 3 3 3 3 1 1= 36

7 5 5 5 3 3 3 3 2 1= 37

Neste primeiro caso, iriamos precisar de um berlinde com o número 2 ou com o número 8, ou 6 ou, ainda, 4 para conseguir obter uma soma que desse 37.

7 7 5 5 3 3 3 3 1 1= 38

7 6 5 5 3 3 3 3 1 1= 37

No segundo caso, verificamos que era necessário subtrair 1. Assim sendo e de modo a manter os 10 berlindes, precisávamos de um berlinde que, por exemplo, fosse o número 6. Deste modo, a soma dos números dos berlindes seria 37, caso contrário daria sempre um número par, 36 e 38.

7 7 5 5 3 3 3 1 1 1= 36 (+1)

7 7 7 5 3 3 3 1 1 1= 38 (-1)

7 7 5 5 3 1 1 1 1 1= 36 (+1)

Nos casos seguintes, verificamos, exatamente, a mesma coisa. Isto levou-nos a pensar que talvez este problema não tivesse uma resolução possível. Isto porque, segundo o que observamos era necessário que algum do número dos berlindes fosse alterado para um número par, para que, a sua soma fosse 37.

# Algumas respostas

De modo a confirmarmos a nossa ideia observamos o seguinte:

37 / 10 = 3, com resto 7

Número de bolas necessárias

Assim sendo teríamos a seguinte distribuição:

3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 7

Tentando agrupar estes números de modo a obter a soma 37, percebemos que ficávamos com 9 berlindes e quando tentávamos agrupar os valores desses 9 berlindes ficávamos com 11 berlindes, ora vejamos:

3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 7 =37 e são 11 berlindes

5 1 7 1 1 1 5 7 1 1 7 =37 e são 11 berlindes

5 1 7 3 5 7 1 1 7 =37 e são 9 berlindes

Verificamos, assim, que era impossível fazer uma combinação que tivesse 10 berlindes de modo a que a sua soma fosse a desejada.

Resumindo, percebemos que com estas combinações de números ímpares e tendo, necessariamente, de combinar 10 berlindes nunca seria possível chegar ao número 37.

# Explicar, justificar e provar

Explicar — pretende fazer com que os outros compreendam nosso raciocínio e do que estamos convencidos ser verdade

Justificar — explicitamos as razões por que consideramos que é verdade

Provar — convencemos os outros de que o que dizemos é mesmo verdade