



Universidade do Minho
Instituto de Educação e Psicologia
Departamento de Metodologias da Educação

Metodologia do ensino da Matemática I

NATUREZA DA MATEMÁTICA

Maria Helena Martinho

Matemática

1. Quais os objectos da Matemática?
2. Onde existem (se de facto existem)?
3. Qual a natureza da verdadeira Matemática?
4. Como podemos saber o que sabemos sobre a Matemática?



Questão favorita dos filósofos que gostam de dar como exemplo da verdade absoluta a verdade Matemática

Matemática

1. É a Matemática verdadeira?
2. Existe uma noção absoluta de rigor?
3. Quais são os fundamentos da Matemática?

Escolas do pensamento que divergem na resposta a estas questões:

Logicismo	Frege, Russell, Peano, Whitehead
Platonismo	Gödel, Thom
Formalismo	Hilbert
Intuicionismo	Brouwer

Logicismo



Logicismo

Escola iniciada em 1884 pelo alemão Frege (1848-1925) filósofo, matemático e lógico. Dezoito anos mais tarde foi redescoberta por Bertrand Russell

Outros matemáticos: Peano e Whitehead

Propósito:

Mostrar que a Matemática Clássica era parte da lógica

Nesse sentido, Russell e Whitehead criaram os Principia Mathematica (1910) que pode ser considerada uma teoria formal de conjuntos a partir da qual mostraram como derivar toda a matemática conhecida na sua época

Logicismo

Alargaram a noção de lógica para mostrarem que os axiomas de que partiam pertenciam à lógica

[uma proposição lógica é uma proposição que tem completa generalidade e que é verdadeira em virtude da sua forma e não do seu conteúdo]

Logicismo foi muito importante para os fundamentos da Matemática e da lógica matemática.

O Logicismo está fundado no platonismo

Russell era platonista e aceitava que as entidades abstractas da Matemática existem sem questionar a forma como eram construídas

Logicismo



Platonismo

Matemáticos platonistas:

René Thom e Kurt Gödel

A existência de objectos matemáticos é um facto objectivo, totalmente independente do nosso conhecimento. Todos estão bem determinados, com propriedades bem determinadas, sendo algumas conhecidas e muitas delas desconhecidas

Objectos que existem fora do espaço e do tempo, são mutáveis

Um matemático é um cientista empírico, não pode inventar nada, porque tudo já existe. Só pode descobrir.

Intuicionismo

Matemáticos intuicionistas:

Brouwer e Bishop

A escola teve início cerca de 1908 com o matemático holandês Brouwer (1881-1966)

Sentiam que muita coisa estava errada na Matemática clássica

Consideravam os paradoxos da Teoria de Conjuntos não como erros dos matemáticos (corrigíveis) mas como uma indicação da imperfeição da Matemática clássica e propuseram-se construí-la de baixo para cima

Intuicionismo

A base é a explicação do que são os números naturais (a partir do 1). Há uma consciência inata do que é o número 1 e do processo de construção dos restantes números por repetição até n (finito). Esta construção é possível porque temos consciência inata do tempo

Kant

usava a palavra intuição para significar consciência inata

A construção é indutiva (construímos o 3 a partir do 1 e do 2, não do nada) e efectiva (quando terminamos uma construção obtemos um conceito construído, pronto para ser usado)

“A Matemática é uma actividade mental que consiste em realizar construções efectivas e indutivas umas após as outras”

Intuicionismo

As provas são construtivas, não aceitam provas de existência como, por exemplo, por redução ao absurdo

Não aceitam que a Matemática seja reduzida a uma ciência como, por exemplo, a lógica

Qualquer processo lógico válido é um processo construtivo, logo, a lógica clássica faz parte da Matemática



A lei do 3º excluído não é aceite

Intuicionismo

O Intuicionismo não quer justificar a Matemática clássica, parte da qual não aceita como Matemática. Propõe uma nova definição de Matemática e ver em que resulta

Razões para a rejeição pela maioria dos matemáticos:

- Vários resultados da Matemática que não têm provas construtivas;
- As provas clássicas são mais curtas e elegantes;
- Há teoremas válidos no intuicionismo que não são classicamente

Ex: “Toda a função real é contínua” (vem da definição intuicionista de função)

Intuicionismo

O Intuicionismo está próximo do conceptualismo que sustenta que as entidades abstractas existem apenas na medida em que podem ser construídas pela mente



Formalismo



Formalismo

Hilbert descreveu as Matemáticas como sendo “uma matéria na qual nós **nunca sabemos do que falamos**, nem se o que dizemos é **verdade**”

As definições repousam em termos desprovidos de definição - termos primitivos

As demonstrações dependem de afirmações desprovidas de prova racional ou de princípios implicando os termos não definidos - axiomas

Formalismo

Escola criada em 1910 por David Hilbert (1862-1943)

Programa dos formalistas era formalizar toda a Matemática mostrando-a livre de contradições

A Matemática reduz-se assim, a um jogo de regras formais

Exemplo: Hipótese do contínuo de Cantor

Cantor conjecturou que não há nenhum número cardinal infinito que seja maior que \aleph_0 e menor que \aleph_1

Gödel (1937) mostra que a hipótese não pode ser demonstrada

Cohen (1964) mostra que a hipótese não pode ser refutada

Formalismo

Um **platonista** considera que os nossos axiomas são incompletos. Que não compreendem suficientemente bem o conjunto dos números reais para encontrar uma resposta.

Um **formalista** considera a análise platonista sem sentido, pois não existe um sistema de números reais, a não ser que o criemos. Podemos criá-lo segundo a nossa conveniência.

Encontram-se em extremos opostos no que diz respeito à existência e à realidade.

No entanto, estão de acordo sobre os princípios de raciocínio permitidos na prática matemática

Formalismo

Falhas

Em 1931 Gödel provou que a formalização não pode ser considerada como uma técnica matemática para provar que a Matemática é livre de contradições

Teorema de Gödel:

Nenhuma frase de uma linguagem formal L que possa ser interpretada como dizendo que a teoria T é livre de contradições pode ser formalmente provada dentro da linguagem L

A matemática não pode provar a sua própria consistência

Formalismo

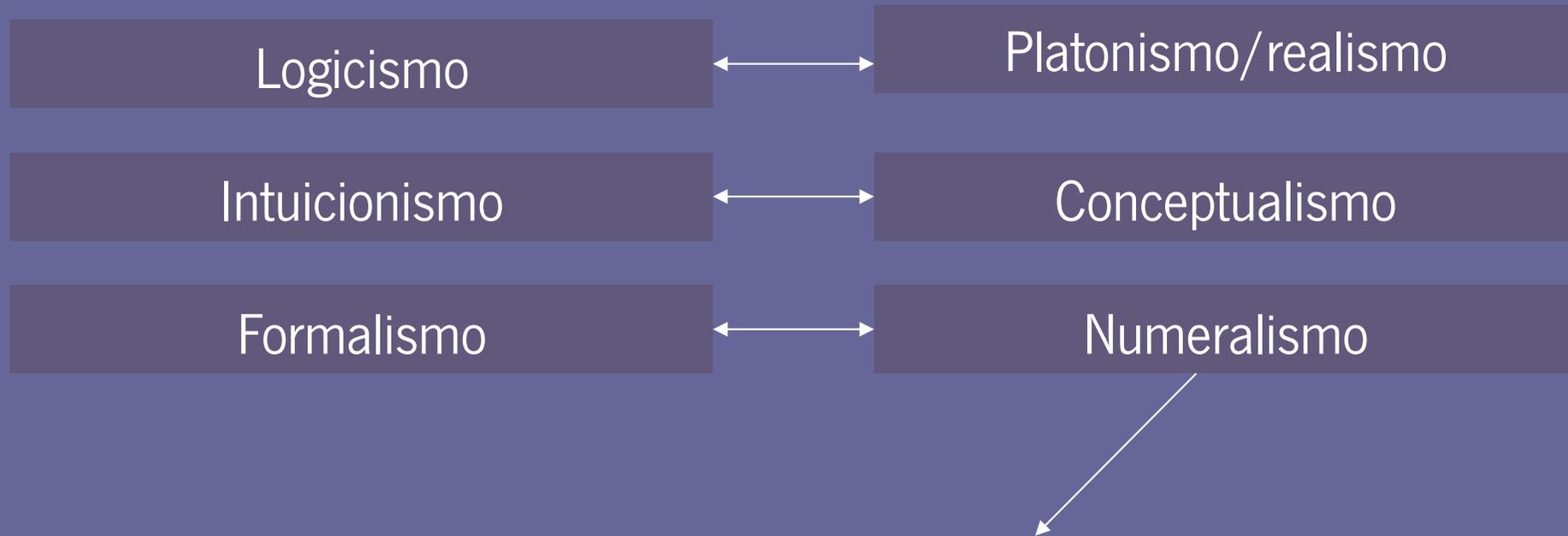
Para os formalistas fazer Matemática é manipular símbolos sem significado de uma linguagem de 1ª ordem, de acordo com regras sintáticas explícitas

A escola formalista é sem dúvida a que mais influencia a Matemática actual, em particular, foi com base nela que se desenvolveu a lógica matemática moderna (nomeadamente, a teoria dos modelos, a teoria das funções recursivas)

Formalismo



Correntes da Matemática



Numeralismo (latim) - pertencente a um nome

As entidades abstractas não têm qualquer tipo de existência, nem fora da mente humana como sustentam os platonistas, nem como construções mentais dentro da mente humana (conceptualistas), são apenas palavras escritas ou articulações vocais, isto é, nomes.

Metáforas do matemático

Ponte, J. P. (1992). Concepções dos professores de Matemática e processos de formação. In M. Brown, D. Fernandes, J. F. Matos, J. P. Ponte (Org.) Educação Matemática: Temas de investigação. Lisboa: IIE, SPCE.

Matemático criativo

Matemático

- Matemático a fazer investigação
- Elemento activo e criativo de construção do saber matemático
- Os matemáticos fazem um grande esforço para compreender os conceitos e resultados já existentes
- Os matemáticos têm uma grande capacidade de concentração e de resistência à frustração, elementos indispensáveis à sua sobrevivência profissional

Aluno como matemático

Ao aluno, mais do que estudar o saber já construído, cabe-lhe investigar situações, resolver problemas formulados por si próprio e investigar conceitos e notações

Matemático criativo

Engenheiro

- A aplicação da matemática a situações exteriores à Matemática é cada vez mais importante.

Aluno como engenheiro

É importante que o aluno formule situações em termos matemáticos (matematização) e aplique conceitos já seus conhecidos à resolução de problemas, incluindo a construção de modelos matemáticos (modelação)

Matemático criativo

Matemático e Engenheiro

A tendência actual é, cada vez mais, ver a Matemática como um todo, considerando-se artificiosa e limitada a distinção entre Matemática Pura (Matemático criativo) e a Aplicada (Engenheiro), dado que as mesmas teorias podem ser vistas como “puras” e como “aplicadas” dependendo apenas do ponto de vista.