

# Resolução de problemas

## Para quê?

- Promover a aprendizagem matemática
- Construir novos conhecimentos
- Aplicar e adaptar diversas estratégias
- Analisar e refletir (aprender) sobre o processo de resolução de problemas
- Contactar com o poder e utilidade da matemática

(NCTM, 2007)

# Funções da resolução de problemas

- O desenvolvimento de uma capacidade
- Perceção da natureza da Matemática
- Uma forma de motivação para a aprendizagem
- Um forma de organizar a aprendizagem
- Uma forma de introduzir novos conceitos
- Uma oportunidade para a aplicação de conceitos
- Um contexto para o desenvolvimento de capacidades relacionadas
- Um espaço para a criatividade e desenvolvimento do espírito crítico
- Uma forma de dar significado à atividade Matemática
- Um ambiente de aprendizagem

# O lugar da resolução de problemas

- **No final do capítulo** **Pode ser mas não basta!**
  - Exercício disfarçado, o problema de aplicação mais elaborado
  - Pressupõe a utilização dos conhecimentos “adquiridos”
  - Visa a consolidação, a sedimentação
  - A lógica do “manual” versus a lógica do “trabalho na aula”
- **Independente dos temas curriculares** **Útil só para alguns alunos**
  - Tendem a assumir uma posição marginal
  - Problema da semana, da quinzena, do mês
- **Enquadrada pelo currículo**
  - Pelos objetivos e finalidades
  - Pelas capacidades a desenvolver
  - Pelos tópicos e temas
  - Pelos recursos, nomeadamente, as tecnologias
  - Pelo papel do aluno na sua aprendizagem
  - Pelo papel do professor na sala de aula

# O lugar da resolução de problemas e dos exercícios

- O ensino da resolução de problemas  
(Estratégias, ênfase nas etapas e nos modelos de resolução de problemas)
- O ensino com resolução de problemas  
(Determinados tópicos são tipicamente associados à resolução de problemas, como as equações, a proporcionalidade, etc.)
- O ensino através da resolução de problemas  
(A resolução de problemas desempenha múltiplas funções e caracteriza o **ambiente** de aprendizagem, os exercícios, os algoritmos, a prática, o cálculo, o desenvolvimento dos conceitos interligam-se com situações problemáticas, com propostas de investigação, com o desenvolvimento do raciocínio matemático, com a comunicação matemática, etc.)

# Resolução de problemas na aula de Matemática

- Ideias da investigação em educação matemática:

- *A necessidade de integração*

*“A tarefa primordial do professor de Matemática é facilitar a aprendizagem da Matemática pelos seus alunos, o que envolve não apenas certos padrões gerais de conduta face a situações matematizáveis mas também uma familiarização profunda com certos conteúdos e ferramentas básicas da Matemática atual ...”*

*“Que um número inteiro qualquer admita uma decomposição única em fatores primos é um facto central da teoria dos números e, ao mesmo tempo, uma das ferramentas mais frutíferas na resolução de problemas que envolvem números”*

*(Miguel de Guzmán, 1992)*

# Resolução de problemas na aula de Matemática

- Ideias da investigação em educação matemática:

- *A necessidade da diversidade e da experiência*

*“Não é invulgar ouvirmos os alunos fazerem afirmações sobre os problemas, revelando que estes não são encarados como algo inerente à própria natureza da Matemática mas apenas uma secção especial de um dos capítulos de Álgebra do programa – equações ou sistemas de equações”.*

*“A resolução de problemas consiste numa larga variedade de processos, atividades e experiências e o ensino da Matemática deveria refletir essa diversidade”*

*(Paulo Abrantes, 1989)*

# Resolução de problemas na aula de Matemática

- Ideias da investigação em educação matemática:

- ***A importância do ambiente de trabalho***

*“No ensino da resolução de problemas, é indispensável ter em conta os seguintes aspetos:*

- *proporcionar experiência na resolução de problemas que sejam desafiadores*
    - *proporcionar aos alunos uma reflexão sobre o trabalho que vão desenvolvendo*
    - *apresentar estratégias simples de resolução de problemas”*

*“Por outro lado, salienta-se o papel do professor no sentido de incentivar um ambiente de trabalho que envolva ativamente o aluno”*

*(Joana Porfírio, 1993)*

# Resolução de problemas na aula de Matemática

- Ideias da investigação em educação matemática:
  - ***A abordagem investigativa ou inquiridora como método***
    - *Participação ativa dos alunos na construção do conhecimento, procurando dar sentido a conceitos, regras e problemas;*
    - *Desenvolvimento da autonomia dos alunos relativamente à sua aprendizagem*
    - *Participação dos alunos, como uma comunidade de inquiridores, na inquirição;*
    - *A Matemática é vista como um produto da atividade humana e anomalias, ambiguidades e controvérsias são avaliadas como um potencial estímulo para investigar;*
    - *O professor dirige a inquirição e a aprendizagem dos alunos a partir da apresentação de situações ricas*

*(Joana Brocardo, 2001)*



# Resolução de problemas na aula de Matemática

- Ideias da investigação em educação matemática:

- *A resolução de problemas e as tecnologias*

*“Neste estudo ficou patente o modo como a utilização do computador pode alterar o carácter ‘problemático’ dos problemas. O uso da tecnologia possibilita a antecipação de um problema na sequência habitual dos conteúdos e tópicos curriculares. Esta antecipação torna o carácter ‘problemático’ do problema muitas vezes maior (um genuíno problema)”*

*“O mesmo problema tem diferentes graus de desafio e de dificuldade quando se utiliza ou não o computador”*

*(Palmira Ferreira, 2007)*

# Resolução de problemas na aula de Matemática

- Ideias da investigação em educação matemática:

- *A resolução de problemas e os recursos*

*“Na maior parte dos casos um problema pode cumprir diferentes funções, mas cabe ao professor determinar a função principal que deve cumprir-se através da resolução de problemas e criar as condições necessárias para que se obtenham os resultados pretendidos. Esta tarefa não é fácil, pois implica a seleção dos problemas a propor e, seleccionar uma coleção de problemas valiosos e instrutivos para os alunos é, talvez, a tarefa mais difícil com que o professor se pode deparar”.*

*(António Borralho, 1991)*

# Resolução de problemas e desenvolvimento do currículo

- Ideias da investigação em educação matemática:

- *A resolução de problemas e os aspetos afetivos*

*“Têm-se detetado reações fortes nos alunos aquando da resolução de problemas. Frustração e pânico são exemplos de reações manifestadas por alunos que não conseguem conceber ou, mesmo, esboçar um plano de abordagem. Por outro lado, os alunos que chegam à solução de um problema expressam, na maioria dos casos, sentimentos de intensa satisfação e, até, de alegria”.*

*(Leonor Moreira, 1989)*

*“Todos temos experiência de que, por exemplo, um dos aspetos que normalmente os alunos detestam, é de ter de resolver um problema cujo enunciado seja demasiado longo.”*

*(Isabel Vale, 1995)*

# Factores que podem influenciar o desempenho dos alunos na RP

- Conceções (por ex. sobre a Matemática)
- Atitudes (por ex. interesse; autoconfiança)
- Experiências prévias
- Contexto do problema
- Capacidades
- Conhecimentos
- ...

Resolvam os problemas que se seguem e indiquem que estratégia ou estratégias foram utilizadas?

## A VIÚVA.

Quatro mulheres (Ana, Beatriz, Carla e Dora) e três homens (Eduardo, Fernando e Gustavo) juntam-se todas as noites para jogar às cartas. Dispõem dum baralho para quatro jogadores.

- a) Entre eles há três casais e uma viúva.
- b) Os elementos do mesmo casal não são nunca companheiros na mesma partida.
- c) Apenas um casal joga na mesma partida.
- d) Uma noite em que jogaram quatro partidas distribuíram-se assim:

Ana e Eduardo	contra	Beatriz e Fernando
Ana e Gustavo	contra	Dora e Fernando
Beatriz e Carla	contra	Fernando e Gustavo
Carla e Eduardo	contra	Dora e Gustavo

Quem é a viúva?

Expliquem como chegaram à conclusão.



O Miguel guarda as meias e as luvas numa gaveta do seu armário. Tem lá seis pares de meias azuis, cinco pares de meias verdes, quatro pares de luvas pretas e três pares de luvas cinzentas.

Infelizmente a gaveta está bastante desarrumada e as várias peças estão todas misturadas.

Certa manhã de Inverno, estava ainda escuro e faltou a luz. O Miguel precisava de um par de meias e outro de luvas, mas, devido ao frio, tinha as mãos congeladas e não conseguia distinguir uma meia de uma luva.

Qual o menor número de peças que ele tem de tirar da gaveta para ter a certeza de ter um par de meias iguais e outro de luvas da mesma cor?

## Problema das 10 bolas

Num saco temos dez bolas, cada uma de sua cor, cada uma com o seu número. Se alguém retirar duas bolas e nos disser a soma dos dois números, conseguimos sempre descobrir as cores das bolas. Qual é o conjunto formado por números naturais menores possíveis que devo usar para conseguir isso?



## Problema dos recipientes de água

Três recipientes contêm água. Se se verter  $\frac{1}{3}$  do conteúdo do primeiro recipiente no segundo,  $\frac{1}{4}$  do segundo no terceiro, e  $\frac{1}{10}$  do terceiro no primeiro, então cada recipiente fica com 9 litros. Que quantidade de água continha inicialmente cada recipiente?

## A VIAGEM AO PORTO

Numa viagem ao Porto, o Adriano fez as seguintes observações relativamente aos hotéis nos quais ficou hospedado:

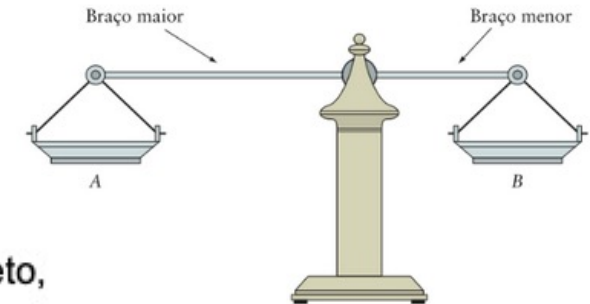
- Sempre que a comida era boa, os empregados eram delicados;
- Todos os hotéis abertos durante todo o ano tinham vista para o rio Douro;
- A comida só era má em alguns hotéis baratos;
- Os hotéis com piscina tinham os muros cobertos de madressilvas;
- Os hotéis cujos empregados eram indelicados eram os que estavam abertos apenas durante uma parte do ano;
- Nenhum hotel barato admitia a presença de cães;
- Os hotéis sem piscina não tinham vista para o rio Douro.



De entre estes hotéis considerados poderão os proprietários de cães apreciar os muros com madressilvas? Justifique a sua resposta.

## A BALANÇA DESONESTA

Uma balança de braços tinha um braço maior do que o outro, como mostra a seguinte figura:



Para conhecer quanto a balança mentia sobre a verdadeira massa de um objeto, foram feitas duas experiências, usando bolas de pingue-pongue e cubos de plástico todos iguais entre si.

### 1.ª Experiência:

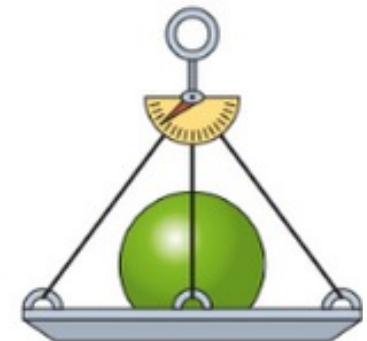
- Três bolas colocadas no prato A equilibram com oito cubos no prato B.

### 2.ª Experiência:

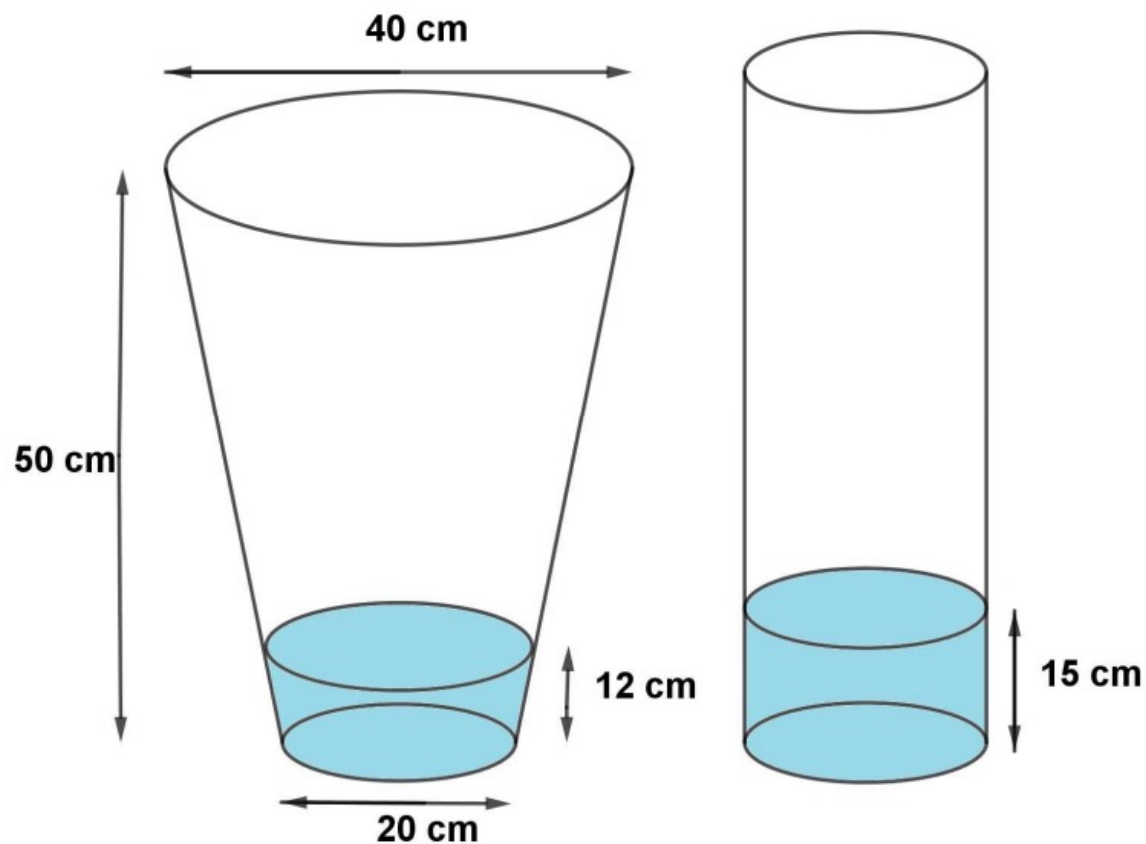
- Um cubo cubos no prato A equilibra com seis bolas no prato B.

Com uma balança de ourives conclui-se que as bolas tinham, cada uma, a massa de 10 g.

Qual é a verdadeira massa de um cubo de plástico?



## ENCHENDO RECIPIENTES



Em 12 segundos enchemos estes recipientes até uma altura de 15 e 12 cm. Calcula até que altura se encherá cada um num minuto.

## ANIVERSÁRIO

O *Alberto* e o *Carlos* acabaram de se tornar amigos da *Helena*, e querem saber quando é o seu aniversário. A *Helena* deu-lhes uma lista de 10 datas possíveis:

15 de maio	16 de maio	19 de maio
17 de junho	18 de junho	
14 de julho	16 de julho	
14 de agosto	15 de agosto	17 de agosto

A *Helena* disse, em separado, o seu dia de aniversário ao *Alberto*, e o seu mês de anos ao *Carlos*. Seguiu-se o diálogo:

- *Alberto*: Não sei quando é o aniversário da Helena, mas sei que o *Carlos* também não sabe.

- *Carlos*: Inicialmente eu não sabia quando era o aniversário da Helena, mas agora já sei!

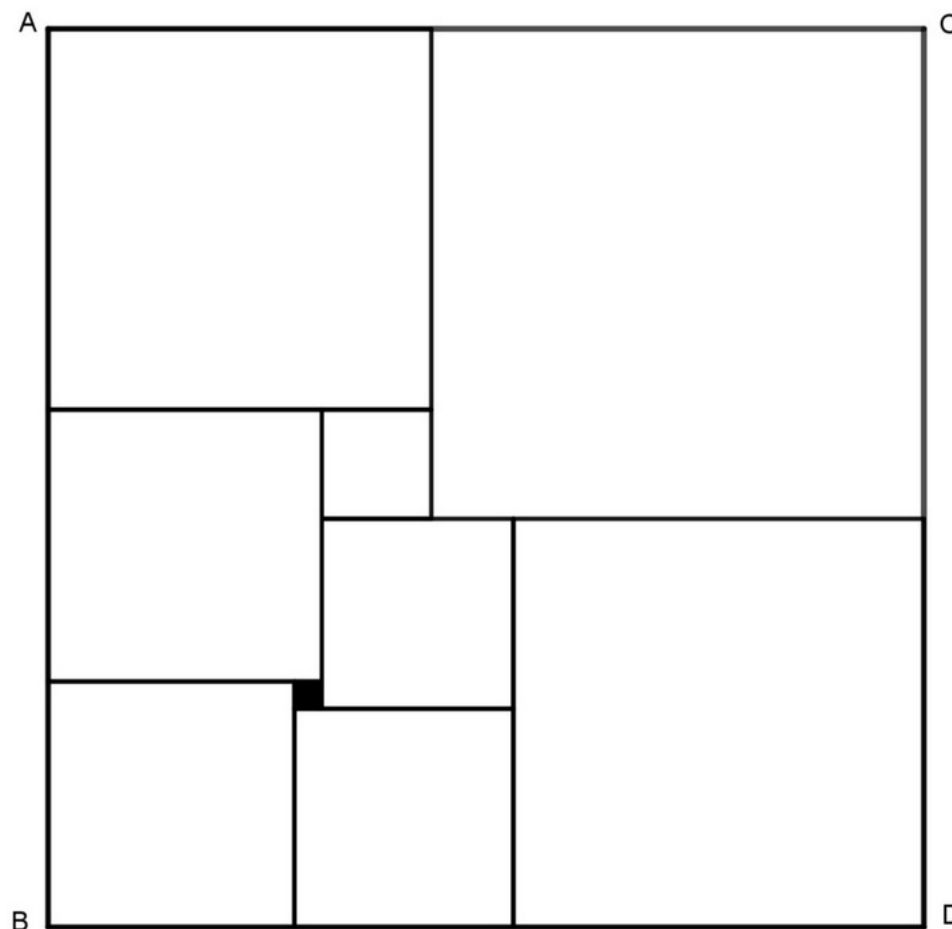
- *Alberto*: Então eu também sei quando é o aniversário da Helena.



Quando é o aniversário da Helena?

## QUADRADO PRESO

Este retângulo ABCD foi cortado em quadrados. Calcula suas dimensões (comprimento e largura), tendo em conta que o quadrado "pequeno" preto da figura representa um quadrado de 2 cm de lado.



## Empresa de pintura

Uma empresa de pintura foi contratada para pintar as paredes de um hotel. Destacou 8 pintores para este trabalho, estimando que são necessários 34 dias para terminar a obra. Ao fim de 10 dias de se ter começado o trabalho de pintura, o dono do hotel reclamou da demora e a empresa enviou 24 pintores para ajudar. Quantos dias no total irá demorar a empreitada?

## TORNEIO EUROPEU QUADRANGULAR

As seleções de futebol de 4 países europeus, por ordem alfabética Alemanha, Espanha, França e Portugal, participaram num torneio de futebol quadrangular de uma volta. Isto é, cada equipa joga uma única vez com as outras três.

Curiosamente, os resultados dos seis jogos foram todos diferentes (por exemplo, se um jogo acabou com 1-0, nenhum outro acabou com 1-0 ou 0-1) e cada equipa obteve uma vitória, um empate e uma derrota. Como acabaram todos com o mesmo número de pontos, foi preciso desempatar pela diferença de golos. A tabela com os 11 golos que se marcaram no total é a seguinte:

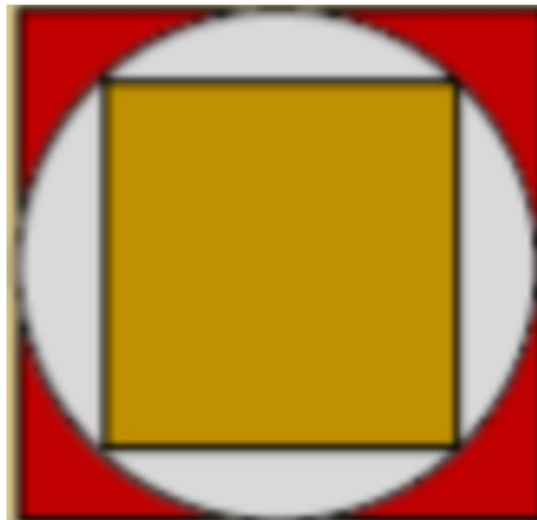
	PARTIDAS JOGADAS	GOLOS MARCADOS	GOLOS SOFRIDOS
<i>Portugal</i>	3	4	2
<i>França</i>	3	2	2
<i>Espanha</i>	3	3	4
<i>Alemanha</i>	3	2	3

Quais foram os resultados de cada jogo?

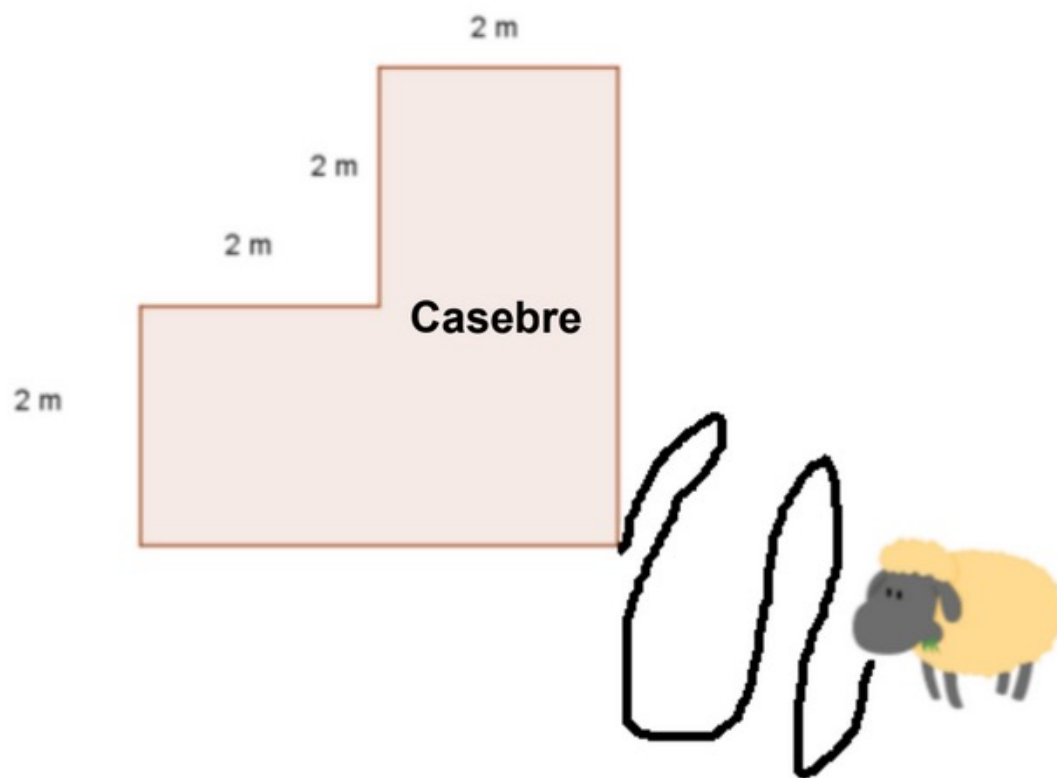


## Quadrado dentro de quadrado

Na figura estão dois quadrados, um inscrito e outro circunscrito ao círculo.  
Qual a razão entre as áreas do quadrado menor e do quadrado maior?  
Descobre mais do que um processo de resolução.



Uma pobre ovelha está amarrada com uma corda de 7 metros de comprimento na esquina exterior de um casebre, como mostra a figura abaixo. Qual é a superfície de erva que tem à sua disposição?



# Tipos de problemas

# Frank K. Lester

- Problemas de um passo
- Problemas de dois ou mais passos
- Problemas de processo
- Problemas de aplicação
- Problemas tipo puzzle

# Frank K. Lester

- Problemas de um passo
- Problemas de dois ou mais passos
- Problemas de processo
- Problemas de aplicação
- Problemas tipo puzzle

**Problema que se resolve por uma das operações básicas**

- Transformação
- Composição
- Comparação

# Frank K. Lester

- Problemas de um passo
- Problemas de dois ou mais passos
- Problemas de processo
- Problemas de aplicação
- Problemas tipo puzzle

**Problema que se resolve  
recorrendo a diferentes  
operações básicas**

# Frank K. Lester

- Problemas de um passo
- Problemas de dois ou mais passos
- Problemas de processo
- Problemas de aplicação
- Problemas tipo puzzle

**Problema que se resolve  
recorrendo a diferentes  
estratégias**

**Mais desafiantes**

# Frank K. Lester

- Problemas de um passo
- Problemas de dois ou mais passos
- Problemas de processo
- Problemas de aplicação
- Problemas tipo puzzle

**Problema que organiza informação retirada da realidade. Pode envolver uma tomada de decisão.**



# Frank K. Lester

- Problemas de um passo
- Problemas de dois ou mais passos
- Problemas de processo
- Problemas de aplicação
- Problemas tipo puzzle

**Problema que requerem que se olhe em diferentes perspectivas.**

**Pode necessitar de uma inspiração particular.**

Tarefa: Procurar nos manuais adotados  
problemas dos diferentes tipos