RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A resolução de problemas deve ser um **processo que envolva activamente os alunos na formulação de conjecturas**, na **investigação e exploração de ideias**, que os leve a discutir e pôr em questão a sua própria maneira de pensar e também a dos outros, a **validar resultados** e a **construir argumentos convincentes**.

Por isso mesmo, a resolução de problemas não acontece quando os alunos fazem uma página de cálculos, quando seguem o exemplo do cimo da página ou quando todos os problemas se destinam à prática do algoritmo apresentado nas páginas precedentes. (NCTM, 1991)

Modelo de Polya

Polya observou e refletiu sobre o modo como ele próprio resolvia problemas e identificou os processos envolvidos nesta tarefa

Polya (1995) afirma que a resolução de problemas possui quatro fases essenciais:

- compreensão do problema
- estabelecimento de um plano
- execução do plano
- verificação dos resultados

Modelo de Polya

Compreensão do problema

Antes de se tentar encontrar uma solução para um problema é indispensável compreender o problema

"Os resultados podem ser drásticos se o aluno desatar a fazer cálculos ou outro tipo de atividades sem compreender o problema em causa" (Vieira, 2008).

Para comprovar a compreensão do problema por parte do aluno, pode-lhe ser solicitado que o reconte, por palavras suas.

A compreensão do problema passa por:

- Identificar a incógnita (o que é desconhecido)
- Quais as condições impostas
- Quais os aspetos relevantes

O sucesso de todas as fases seguintes depende do sucesso desta.

Modelo de Polya

Estabelecimento de um plano

É indispensável delinear um plano para se chegar à solução. Refletir sobre experiências anteriores.

Tem-se um plano quando se sabe, pelo menos em linhas gerais, o que se vai fazer (cálculos, esquemas, construções)

Trata-se da etapa com maior grau de dificuldade.

Esta fase requer algumas competências tais como a criatividade, concentração, conhecimentos e experiência

Modelo de Polya

Execução do plano

Realizam-se todos os passos e procedimentos estabelecidos na fase anterior

Caso não resulte, elabora-se um novo plano

Se o próprio aluno estabelecer o plano terá mais facilidade e confiança na sua execução e é menos provável que se perca e que o esqueça

Modelo de Polya

Verificação dos resultados

Fase imprescindível a averiguação e a discussão do resultado alcançado, fazendo uma revisão do que foi feito

— confirmar se o resultado obtido corresponde à incógnita

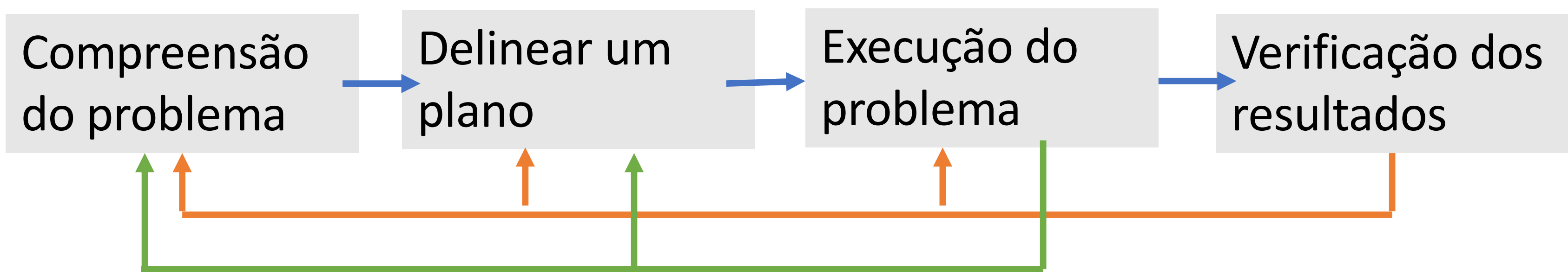
Esta fase é muitas vezes, esquecida, quando encontram a solução do problema, dão-no de imediato por terminado, não voltando a olhar para ele

— é imprescindível perceber se há uma **outra maneira/estratégia** de se chegar à mesma solução

— estabelecer relação com os métodos utilizados em outros problemas (relacionar o problema com outros).

— revisão do percurso percorrido até encontrar a solução, aprofundar conhecimento, identificação das dificuldades e processos utilizados para as eliminar.

Modelo de Polya

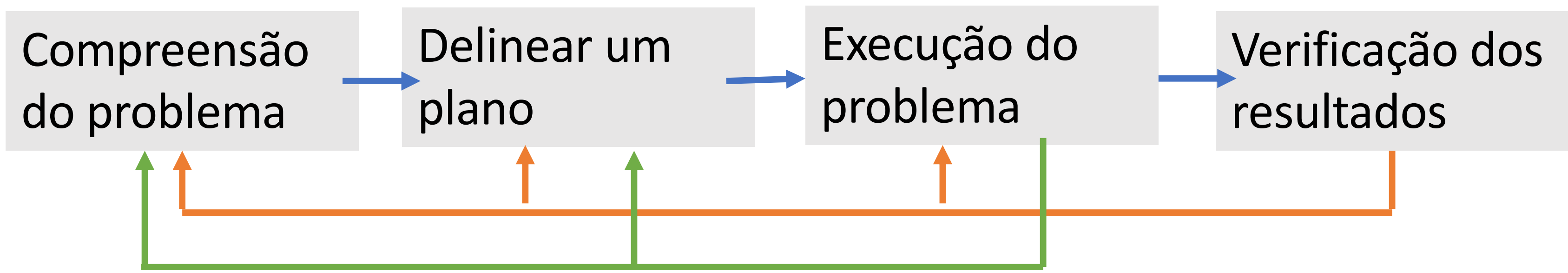


Todas as fases são importantes e permitem obter uma aprendizagem autêntica

Um aluno até pode ser empenhado e dedicado, seguir todas as fases deste modelo apresentado e, mesmo assim, não conseguir uma resolução correta.

A resolução de problemas "(…) a uma arte que envolve a motivação, criatividade e descobertas" (Pereira, 2012)

Modelo de Polya



Ao longo das diferentes fases de resolução de problemas o professor deve procurar manter os alunos ativos e envolvidos na resolução. Pode auxiliá-los no percurso sempre que necessário, por meio de indagações estimulantes.

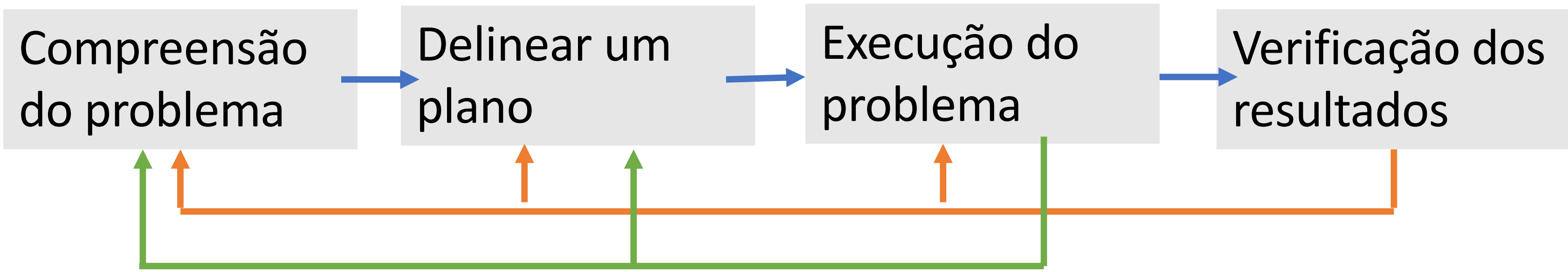
Pode colocar questões ao aluno e fornecer sugestões na medida em que o ajude a colmatar as dificuldades e a quebrar barreiras que surjam, tendo sempre em consideração a etapa que se encontra, permitindo que este descubra, por si próprio, a resposta correta.

Modelo de Polya

com o tempo o aluno começa a colocar estas questões a si próprio

Compreensão do problema	Elaboração de um plano	Execução do plano	Verificar a solução
• Qual é a incógnita? • Quais são os dados? • Qual é a condicionante? • É possível satisfazer a condicionante?	• Já viste este problema antes ou algum semelhante? • Estás a usar todas as condições? • Consegues encontrar relação entre a incógnita e os dados? • Inventa um novo problema que envolva a mesma incógnita. • Muda o problema escrevendo-o de uma forma diferentes.	• Averigua se todos os passos estão certos. • Consegues averiguar e explicar claramente que todos os passos utilizados são genuínos?	• O resultado obtido é exequível? • És capaz de justificar claramente a solução encontrada? • És capaz de chegar ao mesmo resultado através de um método distinto? • O que é que aprendeste com o problema que possas aplicar na resolução de futuros problemas?

Modelo de Polya



investigadores Suecos acrescentaram uma fase à resolução de problemas:

- Compreensão do problema
- Tratamento dos dados
- Planeamento
- Execução do plano
- Controlo

Modelo de Polya

Compreensão do problema

Delinear um plano

Execução do problema

Verificação dos resultados

Outro modelo

Compreensão do problema

Tratamento dos dados

Planeamento

Execussão do plano

Controlo

leitura atenta e cuidada do enunciado, assim como a sua boa interpretação

seleção e análise ponderada dos dados fornecidos no enunciado, formulando de uma forma mais clara e explicita o problema

verificada a solução encontrada, os procedimentos utilizados e planeadas diferentes formas de resolver o problema e procuradas novas soluções.

Os alunos, habitualmente, dividem o tempo como se encontra na imagem.

Dedicam a maior parte do tempo à fase de execussão

Os alunos, habitualmente, dividem o tempo como se encontra na imagem.

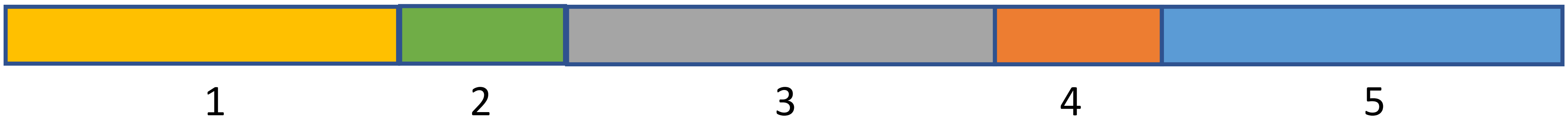
Dedicam a maior parte do tempo à fase de execussão

para os alunos obterem bons resultados e serem cada vez melhores na resolução de problemas devem dedicar mais tempo:

— à fase inicial dado que desta fase dependem todas as outras

— à fase de planeamento, para que o plano seja eficaz

— à fase final dado que aqui é feita a consolidação dos conhecimentos, obrigando o aluno a voltar atrás e verificar todos os passos e resultados. Esta fase ajuda a resolver mais facilmente outras situações futuras



Alguns problemas com história

A. Problema 79 do papiro de Rhind (1650 a.C.)

Há sete casas, cada uma com sete gatos. Cada gato mata sete ratos e cada rato come sete espigas de trigo. Cada espiga de trigo teria produzido sete hekats de cereal. Qual o total de tudo isto?

B. Problema de Fibonacci (1202)

Sete velhas dirigem-se para Roma, cada uma levando sete mulas. Em cada mula há sete alforjes e em cada alforje há sete pães. Em cada pão há sete facas e cada faca tem sete bainhas. A questão consiste em saber quanto é que tudo isto totaliza.

C. A adivinha de S. Matias (sec. XVIII)

Quando me dirigia para St. Ives,
Na estrada, encontrei sete esposas;
Cada esposa tinha sete sacos,
Cada saco tinha sete gatos,
Cada gato tinha sete gatinhos:
gatinhos, gatos, sacos e esposas,
Quantos estavam indo para St. Ives?

Alguns problemas com história

A. Problema 79 do papiro de Rhind (1650 a.C.)

Há sete casas, cada uma com sete gatos. Cada gato mata sete ratos e cada rato come sete espigas de trigo. Cada espiga de trigo teria produzido sete hekats de cereal. Qual o total de tudo isto?

7 casas

7x7 = 49 gatos

7x7x7 = 343 ratos

7x7x7x7 = 2401 espigas de trigo

7x7x7x7x7 = 16 807 hekats de cereal

No total será 7 + 49 + 343 + 2401 + 16 807 = 19 607

Alguns problemas com história

D. Problema 29 do papiro de Rhind (1650 a.C.)

A quantidade e os seus 2/3 são adicionados, e da soma um terço da soma é subtraído, e ficam 10. Qual é a quantidade?

E. Problema babilónico (c. 1800 a.C.)

Uma escada com 0,30 de comprimento, encontra-se encostada a uma parede. Se a parte superior da escada deslizar pela parede 0,6, a que distância da base da parede ficará a parte inferior da escada?

(nota: como o sistema de numeração babilónico era de base sessenta, 0,30 quer dizer nos nossos dias 0,5)

Alguns problemas com história

D. Problema 29 do papiro de Rhind (1650 a.C.)

A quantidade e os seus 2/3 são adicionados, e da soma um terço da soma é subtraído, e ficam 10. Qual é a quantidade?

$x + \frac{2}{3}\, x - \frac{1}{3}\, (x + \frac{2}{3}\, x\,) = 10$ resolvendo a equação obtemos que x=9

Do fim para o princípio temos que

sendo S a soma

$S - \frac{1}{3}\, S = 10$, ou seja, $\frac{2}{3} S = 10$ então, $S = 15$

Assim, se a soma é "a quantidade e os seus 2/3", então

$$x + \frac{2}{3}\, x = 15 \Leftrightarrow 3x + 2\, x = 45 \Leftrightarrow 5\, x = 45 \Leftrightarrow x = 9$$

Alguns problemas com história

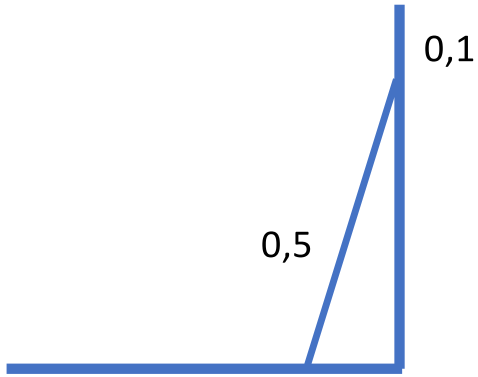
E. Problema babilónico (c. 1800 a.C.)

Uma escada com 0;30 de comprimento, encontra-se encostada a uma parede. Se a parte superior da escada deslizar pela parede 0;6, a que distância da base da parede ficará a parte inferior da escada?

(nota: como o sistema de numeração babilónico era de base sessenta, 0;30 quer dizer nos nossos dias 0,5)

$$0;30 \quad = 0 + 30 \times 60^{-1} = \frac{30}{60} = 0{,}5$$

$$0;6 \quad = 0 + 6 \times 60^{-1} = \frac{6}{60} = 0{,}1$$



Depois disso pode-se aplicar o teorema de Pitágoras

Alguns problemas com história

E. Problema babilónico (c. 1800 a.C.)

Considerando o sistema de numeração babilónico de base sessenta, vejamos alguns exemplos

Notação de Neugebauer

2,35,42 $= 2 \times 60^2 + 35 \times 60 + 42$

3, 21;11,27 $= 3 \times 60 + 21 + \frac{11}{60} + \frac{27}{60^2}$

Números escritos na base 60

Números escritos na base 10

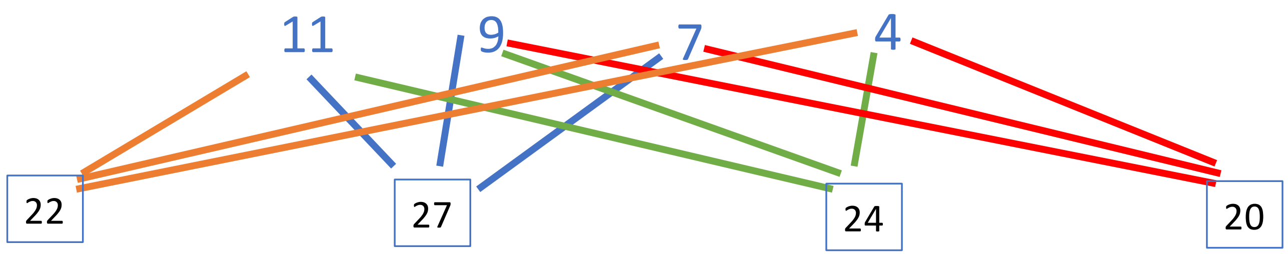
Alguns problemas com história

F. Problema 17 do livro de Diofanto (250 d. C.)

As somas de quatro números, omitindo um número em cada soma, são 22, 24, 27 e 20 respetivamente. Que números são esses?

Como três das somas são pares e apenas uma é ímpar, então o conjunto dos números que queremos encontrar tem apenas um número par. A soma dos três ímpares terá que ser 27 por ser a única soma ímpar. Como as restantes somas são 20, 22 e 24 e são números pares consecutivos, então vamos procurar três números ímpares consecutivos cuja soma dê 27.

Como 27: 3 = 9, os números ímpares serão 11, 9 e 7. O número que falta pode ser, por exemplo, considerando os maiores números 11 e 9 e o par, a soma será o maior dos números 20, 22, e 24, ou seja, 11+9+ a = 24, ou seja, a=4. Fica assim:



Resultado da discussão coletiva

Alguns problemas com história

G. Problemas de Alcuíno (sec. VIII d. C.)

- **Problema XI** - Se cada um de dois homens casar com a irmã do outro, qual é o parentesco entre os seus filhos?

São primos

Alguns problemas com história

G. Problemas de Alcuíno (sec. VIII d. C.)

- **Problema XVIII** - Um homem pretendia atravessar um rio com um lobo, uma cabra e uma couve. O único barco que encontrou apenas podia levar dois de cada vez, mas o homem tinha recebido instruções para transportar todos para a outra margem em boas condições. Como é possível fazê-lo?

Vai a cabra →

←

Vai a couve →

Volta a cabra ←

Vai o lobo →

←

Vai a cabra →

National Council of Teachers of Mathematics (1991). Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar. Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional.

National Council of Teachers of Mathematics (2007). Princípios e normas para a matemática escolar. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Pereira, M. H. M. (2012). Resolução de problemas através do modelo de Polya: As produções escritas de alunos de uma turma de matemática B do 11.º ano. Relatório de Estágio, Universidade do Minho, Braga.

Polya, G. (1995). *A Arte de resolver problemas*. Interciência.

Vieira, L. (2008). Resolução de problema. In E. Mamede (Coord.), Matemática ao encontro das práticas – 1.º Ciclo (pp. 7-14). Braga: Instituto de Estudos da Criança – Universidade do Minho.