

Tarefa 4 — ¿Problemas?

Considerando as tarefas que se seguem procure antecipar resoluções dos alunos.

➤ Resolvam alguns problemas

D.

O sumo e o leite

O João misturou meio litro de sumo de fruta com $\frac{3}{4}$ de litro de leite. Qual a quantidade de batido obtido?

E.

O João gastou leite?

O João comprou litro e meio de leite. Preparou um bolo e gastou $\frac{3}{4}$. Quanto leite sobrou?

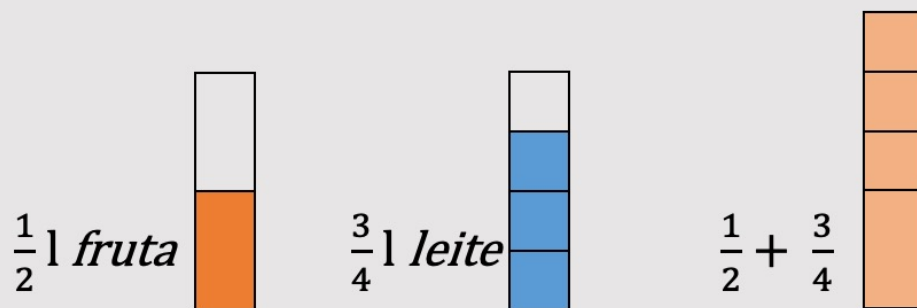
F.

O atraso do João

O João chegou $\frac{3}{4}$ de hora atrasado para um jogo e o seu amigo Pedro $\frac{1}{2}$ hora. Quanto tempo é que o Pedro esperou pelo João?

O sumo e o leite

O João misturou meio litro de sumo de fruta com $\frac{3}{4}$ de litro de leite. Qual a quantidade de batido obtido?



$$\frac{1}{2} \text{ l} + \frac{3}{4} \text{ l} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

O João fez $1\frac{1}{4}$ de batido

ou $\frac{5}{4}$ de litro

Problema 2

O João comprou litro e meio de leite. Preparou um bolo e gastou $\frac{3}{4}$. Quanto leite sobrou?

comprou:

$\frac{1}{2}$ l de leite



1l de leite

gastou:



Comprou 1 litro e meio de leite



sobrou

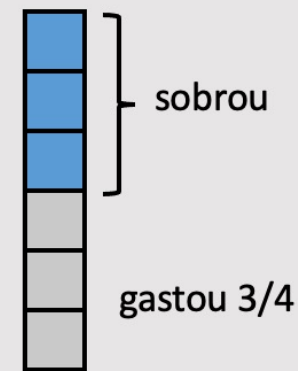
gastou $\frac{3}{4}$

O João gastou leite?

O João comprou litro e meio de leite. Preparou um bolo e gastou $\frac{3}{4}$. Quanto leite sobrou?

$$\begin{aligned} 1\frac{1}{2} - \frac{3}{4} &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \\ &= \frac{4}{4} + \frac{2}{4} - \frac{3}{4} = \\ &= \frac{6}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

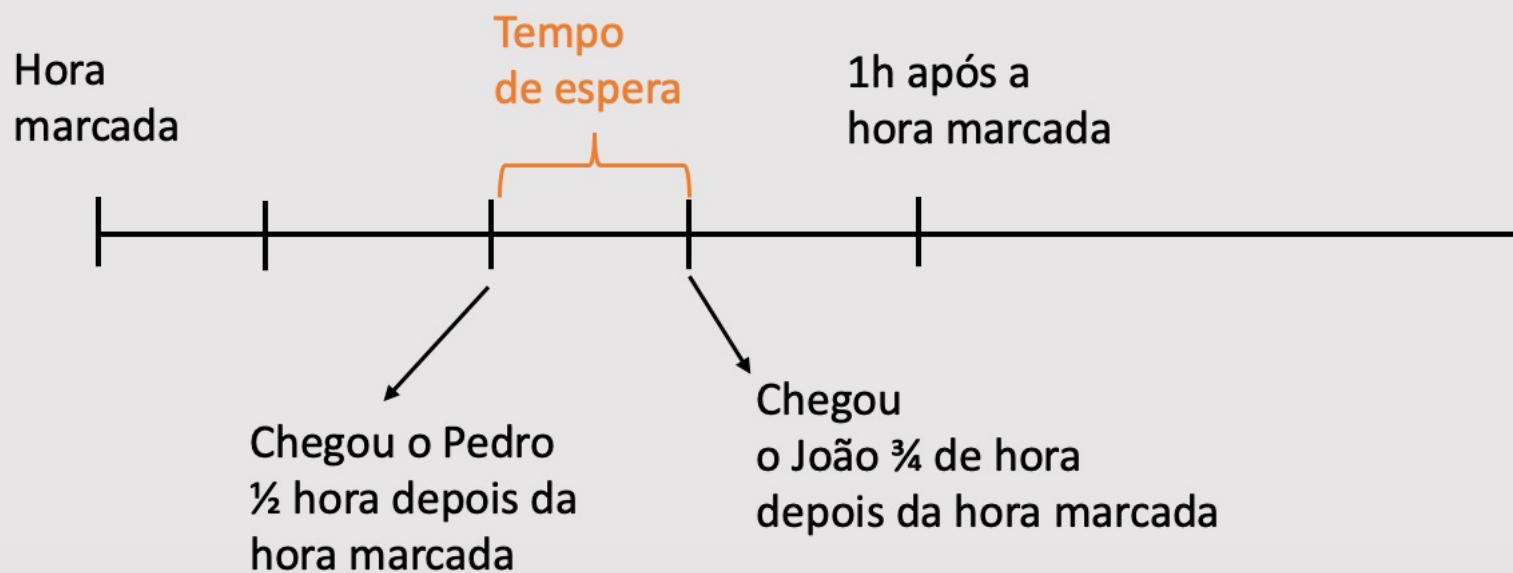
Comrou 1 litro e meio de leite



Sobrou $\frac{3}{4}$ l de leite

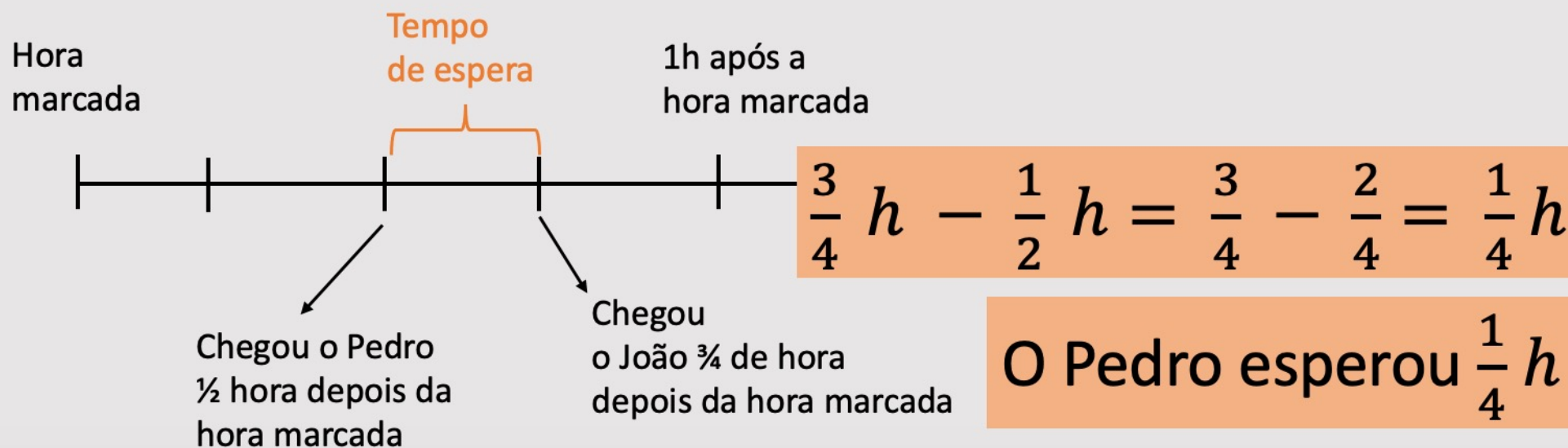
Problema 3

O João chegou $\frac{3}{4}$ de hora atrasado para um jogo e o seu amigo Pedro $\frac{1}{2}$ hora. Quanto tempo é que o Pedro esperou pelo João?



O atraso do João

O João chegou $\frac{3}{4}$ de hora atrasado para um jogo e o seu amigo Pedro $\frac{1}{2}$ hora. Quanto tempo é que o Pedro esperou pelo João?





Conceito de problema

Uma das questões que tem dificultado grandemente a discussão à volta da resolução de problemas é o facto deste conceito ser mal definido e ser compreendido de formas diferentes por diversos autores

(Ernest, 1992)

Se for pedido a 7 matemáticos para definirem problema é muito possível que se obtenham 9 definições diferentes

(Schoenfeld, 1991)

Conceito de problema

- Alguns aspetos consensuais:

- Uma situação para a qual se pretende uma resposta sem que se disponha de uma forma pronta de chegar a essa resposta;
- Um problema pressupõe desafio e interesse, levando ao envolvimento na procura de uma solução;
- Resolver um problema requer mobilização de conhecimentos, passa por encontrar um caminho;
- Um problema pode admitir vários processos de resolução;
- Um problema pode admitir várias soluções ou não ter solução.

Conceito de problema

Conceito com múltiplos significados

Centrado nas características da tarefa:

Toda a tarefa que requer análise e raciocínio no sentido de um objetivo (a solução)
(Smith, 1991)

Centrado no aluno:

Toda a situação em que o indivíduo não tem à partida qualquer algoritmo que lhe garanta a solução. Os seus conhecimentos têm de ser relacionados de nova forma (situação nova, não rotineira)
(Kantowski, 1980)

Centrado nos dois aspetos simultaneamente:

Tarefa fechada, com desafio elevado
(Ponte, 2005)

Conceito de problema

- Palavras chave:
 - Situação ***nova***
 - Questão de resposta ***não imediata***
 - Questão que ***envolve*** o indivíduo
 - Situação que implica ***desafio***
 - Questão ***inesperada***
 - Situação geradora de ***pensamento***
 - Situação que requer ***mobilização***
 - Questão que suscita ***ação***

O “carácter relativo” pela subjetividade

Um problema não existe independentemente da pessoa. Só é problema quando se torna problema para alguém.

Há um sujeito na atividade de resolução de problemas.

Resolver problemas é uma atividade humana.

Um problema é uma situação que difere de um exercício pelo facto de o aluno não dispor de um procedimento ou algoritmo que conduzirá com certeza a uma solução.

(Kantowski, 1981)

O “carácter relativo” pela elasticidade

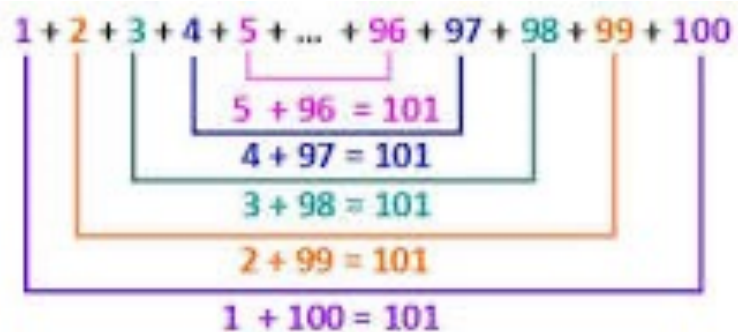
- Problema *versus* Exercício
- Problema *versus* Situação de Aplicação
- Problema real *versus* Exercício Disfarçado
- Problema *versus* Investigação Matemática
- Problema de “Raciocínio Lógico”
- Problema de “Generalização”
- Problema de “Palavras”
- Problema *versus* Puzzle
- Problema *versus* Quebra-Cabeças
- Problema do mundo real
- Problema Aberto *versus* Problema Fechado

Problema? Para quem?

Calcula a soma dos primeiros 100 números naturais

Problema? Para quem?

Calcula a soma dos primeiros 100 números naturais



Revelação de Gauss
(1777-1855)

Através de uma progressão aritmética

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2} = \frac{(1 + 100) \times 100}{2} = \frac{10100}{2} = 5050$$

Problema? Para quem?

Um cliente comprou num dia 2,3 metros de fazenda. No dia seguinte, comprou mais 1,5 metros da mesma fazenda. Quantos metros de fazenda comprou no total?

Aparecem com frequência nos manuais dos primeiros anos.

Pode servir para atribuir um significado concreto às operações matemáticas.

A excessiva repetição transforma rapidamente estes «word problems» (problemas de palavras) em *exercícios disfarçados* nos quais o «contexto» do enunciado acaba por ser irrelevante

Palhares (2022)



Tarefa 2 — Alguns problemas

Considerando os problemas que se seguem procure resolver cada um e posteriormente identificar os objetivos e dificuldades que se podem prever para os alunos (repetir para cada problema as questões da tarefa 3)

Coleção de latas

O Paulo coleciona latas de bebida.

Ontem esteve a arrumar a sua coleção em prateleiras.

Colocou as latas duas a duas, mas sobrou-lhe uma.

Tentou pô-las em grupos de 3, mas sobraram duas.

Experimentou grupos de 4, mas sobraram 3.

Passou aos grupos de 6, mas sobraram 5.

Quase desesperado passou aos grupos de 7 e finalmente acertou! Não sobrou lata nenhuma.

Qual é o número mínimo de latas da coleção? Expliquem o vosso raciocínio da forma que entenderem, utilizando esquemas, desenhos, números ou palavras.

O televisor

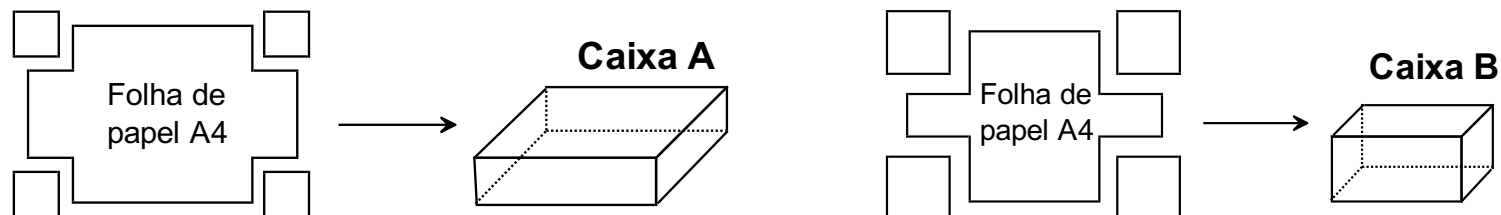
O preço do televisor aumentou 25%. Qual a percentagem de redução que o novo preço precisa de ter para que o televisor volte a ter o preço inicial?

Caixas

A uma folha de papel A4 foram retirados quatro pequenos quadrados iguais em cada um dos seus quatro cantos, obtendo-se por dobragem a caixa A, conforme se mostra na primeira parte da figura.

Seguidamente, numa outra folha de papel A4, foram retirados quatro quadrados iguais maiores em cada um dos seus quatro cantos, obtendo-se por dobragem a caixa B, conforme se mostra na segunda parte da figura.

Os volumes das caixas A e B são iguais ou diferentes? Porquê?



Folha de papel

Uma folha de papel A4 pode ser enrolada segundo o lado maior ou segundo o lado menor da folha de papel, gerando-se, dois cilindros A e B, sem bases, como mostra a figura. Os volumes dos cilindros A e B são iguais ou diferentes? Porquê?

Tarefa 3 — Resoluções dos alunos

Perante as resoluções apresentadas, comente o tipo de raciocínio elaborado pelo aluno, que tipo de erros pode identificar.

Coleção de latas

O Paulo coleciona latas de bebida.

Ontem esteve a arrumar a sua coleção em prateleiras.

Colocou as latas duas a duas, mas sobrou-lhe uma.

Tentou pô-las em grupos de 3, mas sobraram duas.

Experimentou grupos de 4, mas sobraram 3.

Passou aos grupos de 6, mas sobraram 5.

Quase desesperado passou aos grupos de 7 e finalmente acertou! Não sobrou lata nenhuma.

Qual é o número mínimo de latas da coleção? Expliquem o vosso raciocínio da forma que entenderem, utilizando esquemas, desenhos, números ou palavras.

Expliquem o vosso raciocínio da forma que entenderem, utilizando esquemas, desenhos, números ou palavras.

O resultado é 35

Porque de duas em duas dá 34 e sobra 1, de 3 em 3 dá 33 e sobra 2, de 4 em 4 dá 32 e sobra 3, de 6 em 6 dá 30 e sobra 5, mas de 7 em 7 dá 35 e não sobra nada.

The diagrams illustrate the division of 35 items into groups of different sizes:

- Group of 2:** 17 full groups and 1 item left over. Labeled "sobra 1".
- Group of 3:** 11 full groups and 2 items left over. Labeled "sobra 2".
- Group of 4:** 8 full groups and 3 items left over. Labeled "sobra 3".
- Group of 6:** 5 full groups and 5 items left over. Labeled "sobra 5".
- Group of 7:** 5 full groups and 0 items left over. Labeled "não sobra nada".

Expliquem o vosso raciocínio da forma que entenderem, utilizando esquemas, desenhos, números ou palavras.

Lo que nós pensámos que se fomos de 6 em 6 e de 7 em 7 até descobrir um total de cada conta até a diferença ser 5.

$$6+6=12 \quad 12+6=18 \quad 18+6=24 \quad 24+6=30$$

$$7+7=14 \quad 14+7=21 \quad 21+7=28 \quad 28+7=35$$

Expliquem o vosso raciocínio da forma que entenderem, utilizando esquemas, desenhos, números ou palavras.

Primeiro pensamos no nº 11 porque adicionamos todos os números que sobraram em todos os grupos que ele fez. ($1+2+3+5=11$) So que depois fomos verificar se esse nº poderia ser o número mínimo de latas mas quando fomos aver se dava para ser dividido em grupos de 7 não deu e aí descobrimos que o nº mínimo de latas teria que ser múltiplo de 7 e aí pensamos no 14 mas o 14 não era o tal. E depois pensamos no 21 e no 28 e não deu e fomos pensar no 35 e aí era o tal.

$$\begin{array}{r} 35 \overline{) 2} \\ 15 \quad 17 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 35 \overline{) 3} \\ 05 \quad 11 \\ \hline 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 35 \overline{) 4} \\ 3 \quad 8 \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 35 \overline{) 6} \\ 5 \quad 5 \\ \hline 5 \end{array}$$

Nós utilizamos a multiplicação e a divisão para encontrar o número e esse número que é o 35.

Expliquem o vosso raciocínio da forma que entenderem, utilizando esquemas, desenhos, números ou palavras.

$$M_2 = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$$

$$M_3 = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, \underline{33}, \dots\}$$

$$M_4 = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, \underline{32}, 36, 40, \dots\}$$

$$M_6 = \{0, 6, 12, 18, 24, \underline{30}, 36, 42, 48, 54, 60, \dots\}$$

$$M_7 = \{0, 7, 14, 21, 28, \underline{35}, 42, 49, \dots, 63, 70, \dots\}$$

São 35 latas, porque $(7 \times 5 = 35)$ se nós fizermos grupos de 5 com 7 latas não sobram nenhuma latas, e se eu fizer grupos de 5 com 6 latas $(6 \times 5 = 30)$ sobram 5.

Se fizermos grupos de 4 com 7 latas e grupos de 4 com 6 latas já não sobram 5.

Nós teremos mais dificuldades em descobrir qual era o múltiplo de sete, que se fizéssemos grupos de 6 sobravam 5

O televisor

O preço do televisor aumentou 25%. Qual a percentagem de redução que o novo preço precisa de ter para que o televisor volte a ter o preço inicial?

A TV custa inicialmente 500€

$$\frac{500}{2} = 250 \quad \frac{250}{2} = 125$$

$$500 + 125 = 625$$

$$625 - 500 = 125$$

125 é 25% de 500

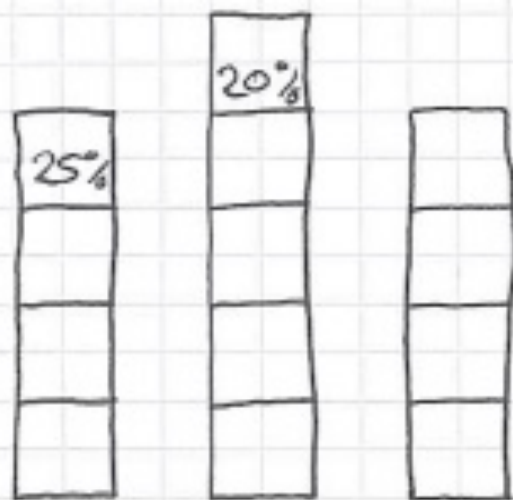
Resposta: O preço tem que ser reduzido 25%

Este aluno concluiu que a redução seria de 25%. Não considerou que devia considerar a percentagem em relação ao novo preço de 625.

Depende do custo da TV porque
25% de 1000 € é mais do que 25%
de 200 €

Resposta: Depende do custo da TV

Não resolveu porque considerou que faltavam dados no problema.



preço
original

preço
final

Resposta: O preço tem que ser reduzido 20%

Primeiro o preço foi aumentado de 800€ para 1000€

Depois o preço foi reduzido $x\%$

$$\frac{x \times 1000}{100} = 200$$

$$10x = 200$$

$$x = 20$$

Resposta: o preço deve ser reduzido 20%

Supondo que a TV custa 1000 €

25% de 1000 é 250

Então a TV custa 1250 €

25% de 1250 é 312,5 €

20% de 1250 é 250

Resposta: O preço tem que ser reduzido 20%

Digamos que a TV custa 1000 €

$$1000 \times 1,25 = 1250$$

$$1250 - 1000 = 250$$

$$\frac{250}{1250} = 0,2$$

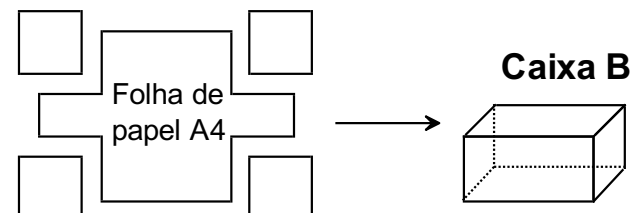
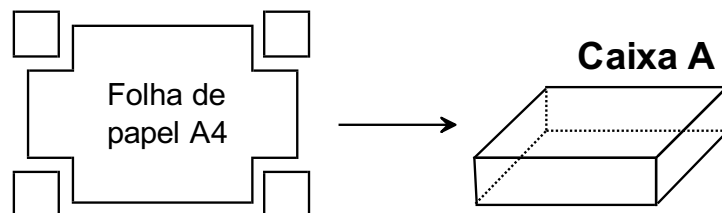
Resposta: O preço deve ser reduzido 20%

Caixas

A uma folha de papel A4 foram retirados quatro pequenos quadrados iguais em cada um dos seus quatro cantos, obtendo-se por dobragem a caixa A, conforme se mostra na primeira parte da figura.

Seguidamente, numa outra folha de papel A4, foram retirados quatro quadrados iguais maiores em cada um dos seus quatro cantos, obtendo-se por dobragem a caixa B, conforme se mostra na segunda parte da figura.

Os volumes das caixas A e B são iguais ou diferentes? Porquê?



Os volumes das caixas A e B são iguais ou diferentes? Iguais.....

Porquê? Porque a caixa A é maior e pode levar mais coisas. A caixa

B é mais pequena mas, contudo, tem uma capacidade de levar

coisas em cima como as outras na caixa B formos ao lado.

O aluno pensou, erradamente, que uma dimensão compensava a outra ficando iguais.

Os volumes das caixas A e B são iguais ou diferentes? ..diferentes.....

Porquê? Porque...na caixa A foram retirados...

4 quadrados pequenos e assim formou-se...

uma caixa pequena. Na caixa B foram...

retirados 4 quadrados maiores e assim...

a caixa é maior e com mais volume.

Concluíram que são diferentes e está correto. No entanto, se é maior ou menor vai depender das medidas dos quadrados

Folha de papel

Uma folha de papel A4 pode ser enrolada segundo o lado maior ou segundo o lado menor da folha de papel, gerando-se, dois cilindros A e B, sem bases, como mostra a figura. Os volumes dos cilindros A e B são iguais ou diferentes? Porquê?

Os volumes dos cilindros A e B são iguais ou diferentes? São... ~~diferentes~~ iguais

Porquê? Porque ambos os cilindros derivam da
mesma folha, só que ela encontra-se de
forma horizontal e de forma vertical.

O aluno pensou, erradamente, que uma dimensão compensava a outra ficando iguais.

Os volumes dos cilindros A e B são iguais ou diferentes? São diferentes.....

Porquê? Porque o cilindro A foi enrolado com a folha de papel com o lado maior, conferindo ao cilindro maior largura e menor altura. O cilindro B foi enrolado com a folha de papel com o lado menor, conferindo ao cilindro B menor largura e maior altura. Como o cilindro B é mais alto que o cilindro A , então o volume de B é maior do que o volume de A .