**Cálculo de Programas**

2.º Ano de LCC (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2023/24

Exame de Recurso — 5 de Junho de 2024, 09h30–11h30
Sala 1.07 + 1.05 do Edifício 2

---

PROVA PRESENCIAL INDIVIDUAL SEM CONSULTA (2h)

**Importante** — *Ler antes de iniciar a prova:*

- *Esta prova consta de **8** questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*
- *Recomenda-se que os alunos leiam a prova antes de decidirem por que ordem querem responder às questões que são colocadas.*

**Questão 1** Infira o tipo mais geral da função

$$\alpha = \langle \pi_1 \times \pi_1, \pi_2 \times \pi_2 \rangle$$

e, a partir dele, a sua propriedade grátis.

---

**Questão 2** Demonstre a seguinte propriedade do combinador condicional de McCarthy

$$p \rightarrow g\ ,\ f \quad = \quad (\neg \cdot p) \rightarrow f\ ,\ g \tag{E1}$$

sabendo que é válida a propriedade

$$(\neg \cdot p)? \quad = \quad \mathsf{coswap} \cdot (p?) \tag{E2}$$

onde $\mathsf{coswap} = [i_2\,, i_1]$.

---

**Questão 3** Numa das fichas das aulas práticas desta disciplina provou-se a igualdade:

$$\overline{f \cdot (g \times h)} = \overline{\mathsf{ap} \cdot (id \times h)} \cdot \overline{f} \cdot g \tag{E3}$$

Mostre que a lei de fusão da exponenciação é um caso particular de (E3).

---

**Questão 4** O algoritmo de *merge sort* usa a função seguinte para dividir uma lista em duas de tamanho o mais igual possível:

$$sep\ [\,] = ([\,], [\,])$$
$$sep\ (h : t) = \mathbf{let}\ (l, r) = sep\ t\ \mathbf{in}\ (h : r, l)$$

Tendo-se já mostrado que

$$
\begin{array}{l}
sep = \llparenthesis\, [n\,, h]\, \rrparenthesis \ \textbf{where} \\
\quad n = \langle \mathsf{nil}, \mathsf{nil} \rangle \\
\quad h = \langle \mathsf{cons} \cdot (id \times \pi_2), \pi_1 \cdot \pi_2 \rangle
\end{array}
$$

mostre, por aplicação da lei de recursividade mútua para listas ($\mathsf{F}\ f = id + id \times f$), que a resolução da equação $sep = \langle f, g \rangle$ conduz a

$$
\begin{array}{l}
f\ [\,] = [\,] \\
f\ (h : t) = \alpha\ (h, g\ t) \\
g\ [\,] = [\,] \\
g\ (h : t) = \beta\ (h, f\ t)
\end{array}
$$

identificando $\alpha$ e $\beta$.

---

**Questão 5** Considere a seguinte generalização de um resultado que foi abordado nas aulas teórico-práticas,

$$
\llparenthesis\, g\, \rrparenthesis \cdot \llparenthesis\, \mathsf{in}_2 \cdot \alpha\, \rrparenthesis = \llparenthesis\, g \cdot \alpha\, \rrparenthesis \quad \Leftarrow \quad \mathsf{G}\, f \cdot \alpha = \alpha \cdot \mathsf{F}\, f \tag{E4}
$$

a que corresponde o diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{T}_1 \arrow[d, "\llparenthesis\, \mathsf{in}_2 \cdot \alpha\, \rrparenthesis"'] & & \mathsf{F}\ \mathsf{T}_1 \arrow[ll, "\mathsf{in}_1"'] \arrow[d, "\mathsf{F}\ \llparenthesis\, \mathsf{in}_2 \cdot \alpha\, \rrparenthesis"] \\
\mathsf{T}_2 \arrow[d, "\llparenthesis\, g\, \rrparenthesis"'] & \mathsf{G}\ \mathsf{T}_2 \arrow[l, "\mathsf{in}_2"] \arrow[d, "\mathsf{G}\ \llparenthesis\, g\, \rrparenthesis"] & \mathsf{F}\ \mathsf{T}_2 \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "\mathsf{F}\llparenthesis\, g\, \rrparenthesis"] \\
C & \mathsf{G}\ C \arrow[l, "g"] & \mathsf{F}C \arrow[l, "\alpha"]
\end{tikzcd}
$$

Mostre que a lei de absorção-cata (procure-a no formulário) é um caso particular de (E4).

---

**Questão 6** Qualquer lista finita de zeros representa um dado número natural, cf a função:

$$
\begin{array}{l}
zeros\ 0 = [\,] \\
zeros\ (n + 1) = 0 : zeros\ n
\end{array}
$$

Pretende-se mostrar a fidelidade dessa representação provando

$$
\mathsf{length} \cdot zeros = id \tag{E5}
$$

ou seja, $\mathsf{length}\ (zeros\ n)$ recupera o $n$ de que se partiu. Recorra a (E4) para demonstrar (E5), sabendo que:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
zeros : \mathbb{N}_0 \to {\mathbb{N}_0}^* \\
zeros = \llparenthesis\, \mathsf{in}_* \cdot (id + \langle \underline{0}, id \rangle)\, \rrparenthesis
\end{array}
\right. \tag{E6}
$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\mathsf{length} : A^* \to \mathbb{N}_0 \\
\mathsf{length} = \llparenthesis\, \mathsf{in}_{\mathbb{N}_0} \cdot (id + \pi_2)\, \rrparenthesis
\end{array}
\right. \tag{E7}
$$

onde $\mathsf{in}_* = [\mathsf{nil}, \mathsf{cons}]$ e $\mathsf{in}_{\mathbb{N}_0} = [\underline{0}, \mathsf{succ}]$, sendo $\mathsf{nil}$, $\mathsf{cons}$ e $\mathsf{succ}$ funções que conhece. **NB:** recordar das aulas $\mathsf{F}\ f = id + f$ e $\mathsf{G}\ f = id + id \times f$ a usar em (E4).

---

**Questão 7** Suponha que sabe que a propriedade

$$g \cdot \mathsf{in} = id + \langle \mathsf{cons}, \pi_2 \rangle \tag{E8}$$

é válida para o gene $g$ do anamorfismo $suffixes = [\!(g)\!]$, em listas. Faça o diagrama desse anamorfismo e mostre, justificadamente, que $suffixes$ é a função que escreveria em Haskell desta forma:

$$suffixes\ [\,] = [\,]$$
$$suffixes\ (h : t) = (h : t) : suffixes\ t$$

---

**Questão 8** Todo o ciclo-*while* que termina pode ser definido por

$$\mathbf{while}\ p\ f\ g = \mathbf{tailr}\ ((g + f) \cdot (\neg \cdot p)?) \tag{E9}$$

recorrendo ao combinador de *"tail recursion"*

$$\mathbf{tailr}\ f = [\![\mathsf{join}, f]\!] \tag{E10}$$

que é um hilomorfismo de base $\mathsf{B}\ (X, Y) = X + Y$, para $\mathsf{join} = [id, id]$.

Derive a definição *pointwise* de $\mathbf{while}\ p\ f\ g$, sabendo que qualquer $h = [\![f, g]\!]$ que termina é tal que $h = f \cdot \mathsf{F}\ h \cdot g$.

---