Cálculo de Programas

2.º Ano de LCC (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2023/24

2º Teste — 15 de Maio de 2024, 16h00–18h00
Salas 0.03 + 0.05 do Edifício 2

PROVA PRESENCIAL INDIVIDUAL SEM CONSULTA (2h)

Importante — *Ler antes de iniciar a prova:*

- *Esta prova consta de **8** questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*
- *Recomenda-se que os alunos leiam a prova antes de decidirem por que ordem querem responder às questões que são colocadas.*

Questão 1 Considere o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
B\times(A+C) \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[r, bend left, "\mathsf{distr}"] \arrow[rr, bend left=50, "\mathsf{iso}^\circ"] & \cdots \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[r, bend left, "\alpha"] & A\times B+B\times C \arrow[l, bend left, "\beta"] \arrow[ll, bend left=50, "\mathsf{iso}"]
\end{tikzcd}$$

(a) Defina o isomorfismo β; (b) Infira a propriedade grátis de α sem o definir.

Questão 2 Demonstrar

$$(p \rightarrow g\ ,\ h) \times f \quad = \quad p \cdot \pi_1 \rightarrow g \times f\ ,\ h \times f$$

a partir das leis do condicional de McCarthy e do facto seguinte:

$$q \rightarrow f\ ,\ f \quad = \quad f \tag{E1}$$

Questão 3 A função $\pi_2 : A \times B \rightarrow B$ é binária e, como tal, faz sentido a sua versão "curried" $\overline{\pi_2} : A \rightarrow B^B$. Usando as leis da exponenciação mostre que $\overline{\pi_2}$ é uma função constante, isto é, que qualquer que seja f se tem:

$$\overline{\pi_2} \cdot f = \overline{\pi_2} \tag{E2}$$

Que função constante é essa? Justifique.

Questão 4 As chamadas "rose trees", que se podem definir em Haskell por

$$\mathbf{data}\ \mathsf{Rose}\ a = \mathsf{Rose}\ a\ [\mathsf{Rose}\ a]$$

são árvores generalizadas em que cada nó tem um número arbitrário (mas finito) de sub-árvores. Defina para este tipo

- os isomorfismos in e out que o caracterizam;
- o functor de base B e o da recursividade F;
- o gene g do catamorfismo $\llparenthesis\, g\, \rrparenthesis$ que conta o número de nós de uma "rose tree".

Questão 5 Recorra à lei de absorção-cata para demonstrar a propriedade

$$count \cdot (\mathsf{BTree}\ f) \quad = \quad count \tag{E3}$$

onde $\mathsf{BTree}\ A \xrightarrow{count} \mathbb{N}_0$ é o catamorfismo

$$count = \llparenthesis\, [\mathsf{zero}, \mathsf{succ} \cdot \mathsf{add} \cdot \pi_2]\, \rrparenthesis$$

para $\mathsf{zero}\ \_ = 0$, $\mathsf{succ}\ n = n+1$ e $\mathsf{add}\ (a,b) = a+b$. **NB:** recorda-se que a base do tipo BTree é $\mathsf{B}\ (f,g) = id + f \times (g \times g)$.

Questão 6 Considere a seguinte generalização da lei de absorção-cata,

$$\llparenthesis\, g\, \rrparenthesis \cdot \llparenthesis\, \mathsf{in}_2 \cdot \alpha\, \rrparenthesis = \llparenthesis\, g \cdot \alpha\, \rrparenthesis \quad \Leftarrow \quad \mathsf{G}\ f \cdot \alpha = \alpha \cdot \mathsf{F}\ f \tag{E4}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{T}_1 \arrow[d, "\llparenthesis\, \mathsf{in}_2 \cdot \alpha\, \rrparenthesis"'] & & \mathsf{F}\ \mathsf{T}_1 \arrow[ll, "\mathsf{in}_1"'] \arrow[d, "\mathsf{F}\ \llparenthesis\, \mathsf{in}_2 \cdot \alpha\, \rrparenthesis"] \\
\mathsf{T}_2 \arrow[d, "\llparenthesis\, g\, \rrparenthesis"'] & \mathsf{G}\ \mathsf{T}_2 \arrow[l, "\mathsf{in}_2"] \arrow[d, "\mathsf{G}\ \llparenthesis\, g\, \rrparenthesis"] & \mathsf{F}\ \mathsf{T}_2 \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "\mathsf{F} \llparenthesis\, g\, \rrparenthesis"] \\
C & \mathsf{G}\ C \arrow[l, "g"] & \mathsf{F}C \arrow[l, "\alpha"]
\end{tikzcd}$$

a que corresponde o diagrama que se dá ao lado. Use (E4) para demonstrar a igualdade

$$\mathsf{length} \cdot \mathsf{zeros} = id \tag{E5}$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathsf{length} : A^* \to \mathbb{N}_0 \\ \mathsf{length} = \llparenthesis\, \mathsf{in}_{\mathbb{N}_0} \cdot (id + \pi_2)\, \rrparenthesis \end{array} \right. \tag{E6}$$

é uma função que conhece bem e onde $\mathsf{zeros}\ n$ é a lista finita de n zeros,

$$\begin{array}{l} \mathsf{zeros}\ 0 = [\,] \\ \mathsf{zeros}\ (n+1) = 0 : \mathsf{zeros}\ n \end{array}$$

isto é

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathsf{zeros} : \mathbb{N}_0 \to {\mathbb{N}_0}^* \\ \mathsf{zeros} = \llparenthesis\, \mathsf{in}_* \cdot (id + \langle \underline{0}, id \rangle)\, \rrparenthesis \end{array} \right. \tag{E7}$$

para $\mathsf{in}_* = [\mathsf{nil}, \mathsf{cons}]$ e $\mathsf{in}_{\mathbb{N}_0} = [\underline{0}, \mathsf{succ}]$. **NB:** recordar das aulas $\mathsf{F}\ f = id + f$ e $\mathsf{G}\ f = id + id \times f$, a usar em (E4).

Questão 7 Considere o anamorfismo $r = [\!(\, g\,)\!]$ onde

$$\begin{array}{l} g\ [\,] = i_1\ () \\ g\ x = i_2\ (\mathsf{last}\ x, \mathsf{init}\ x) \end{array}$$

$\mathsf{last}\ x$ dá o último elemento da lista x e $\mathsf{init}\ x$ dá x sem esse último elemento. O que faz a função r? Acompanhe a sua resposta com o diagrama de r.

Questão 8 Considere a seguinte extensão da lei de recursividade mútua a hilomorfismos que partilham o mesmo anamorfismo:

$$\langle f, g \rangle = (\!|\, \langle h, k \rangle \,|\!) \cdot [\!(\, q \,)\!] \quad \equiv \quad \left\{ \begin{array}{l} f = h \cdot \mathsf{F}\ \langle f, g \rangle \cdot q \\ g = k \cdot \mathsf{F}\ \langle f, g \rangle \cdot q \end{array} \right. \tag{E8}$$

- Para uma dada função q, (E8) reduz-se à lei de recursividade mútua do formulário. Identifique essa função q, justificando.
- Apresente as justificações em falta no seguinte cálculo da lei (E8):

$$\begin{array}{ll}
 & \langle f, g \rangle = (\!|\, \langle h, k \rangle \,|\!) \cdot [\!(\, q \,)\!] \\
\equiv & \qquad \{ \ \text{seja } \langle \alpha, \beta \rangle = (\!|\, \langle h, k \rangle \,|\!) \ \} \\
 & \langle f, g \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle \cdot [\!(\, q \,)\!] \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & \langle f, g \rangle = \langle \alpha \cdot [\!(\, q \,)\!], \beta \cdot [\!(\, q \,)\!] \rangle \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} f = \alpha \cdot [\!(\, q \,)\!] \\ g = \beta \cdot [\!(\, q \,)\!] \end{array} \right. \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} f = h \cdot \mathsf{F}\ \langle \alpha, \beta \rangle \cdot \mathsf{out} \cdot [\!(\, q \,)\!] \\ g = k \cdot \mathsf{F}\ \langle \alpha, \beta \rangle \cdot \mathsf{out} \cdot [\!(\, q \,)\!] \end{array} \right. \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} f = h \cdot \mathsf{F}\ \langle \alpha, \beta \rangle \cdot \mathsf{F}\ [\!(\, q \,)\!] \cdot q \\ g = k \cdot \mathsf{F}\ \langle \alpha, \beta \rangle \cdot \mathsf{F}\ [\!(\, q \,)\!] \cdot q \end{array} \right. \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} f = h \cdot \mathsf{F}\ \langle \alpha \cdot [\!(\, q \,)\!], \beta \cdot [\!(\, q \,)\!] \rangle \cdot q \\ g = k \cdot \mathsf{F}\ \langle \alpha \cdot [\!(\, q \,)\!], \beta \cdot [\!(\, q \,)\!] \rangle \cdot q \end{array} \right. \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} f = h \cdot \mathsf{F}\ \langle f, g \rangle \cdot q \\ g = k \cdot \mathsf{F}\ \langle f, g \rangle \cdot q \end{array} \right. \\
\square &
\end{array}$$