Cálculo de Programas

2.º Ano de LCC (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2023/24

1º teste — 20 de Março de 2024, 16h00–18h00
Salas 1.05 + 1.07 do Edifício 2

PROVA PRESENCIAL INDIVIDUAL SEM CONSULTA (2h)

Importante — *Ler antes de iniciar a prova:*

- *Esta prova consta de **8** questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*
- *Recomenda-se que os alunos leiam a prova antes de decidirem por que ordem querem responder às questões que são colocadas.*

Questão 1 O formulário desta UC inclui as duas equivalências seguintes, válidas para qualquer isomorfismo α:

$$\alpha \cdot g = h \equiv g = \alpha^{\circ} \cdot h \tag{E1}$$
$$g \cdot \alpha = h \equiv g = h \cdot \alpha^{\circ} \tag{E2}$$

Recorra a essas propriedades para mostrar que a igualdade

$$h \cdot \mathsf{distr} \cdot (g \times (id + \beta)) = k$$

é equivalente à igualdade:

$$h \cdot (g \times id + g \times \beta) = k \cdot \mathsf{undistr}$$

(**Sugestão:** não ignore a propriedade natural (i.e. *grátis*) do isomorfismo distr.)

Questão 2 Recorde o isomorfismo

$$\begin{tikzcd} Maybe\ B \arrow[r, bend left, "\mathsf{out}=\mathsf{in}^{\circ}"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & 1 + B \arrow[l, bend left, "\mathsf{in}=[\underline{\mathsf{Nothing}}\,,\mathsf{Just}]"] \end{tikzcd}$$

e considere a função:

$$\mathsf{fromMaybe} :: a \rightarrow Maybe\ a \rightarrow a$$
$$\mathsf{fromMaybe}\ a = [\underline{a}\,, id] \cdot \mathsf{out}$$

Derive a versão *pointwise* de $\mathsf{fromMaybe}$ por forma a não recorrer ao combinador de alternativa (vulg. 'either') de funções nem a funções constantes.

Questão 3 Resolva em ordem a α a equação,

$$\alpha \cdot [id + i_1\,, i_2 \cdot i_2] = id \tag{E3}$$

identificando o tipo mais geral de α e fazendo um diagrama que descreva a equação dada.

Questão 4 Em Haskell, a função $divMod\ x\ y$ dá como resultado um par (q, r) tal que $x = q \times y + r$. Para $y = 2$ (em $\mathbb{N}_0$), r ou é 0 ou é 1, o que quer dizer que podemos pensar numa função

$$divMod2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{B}$$

que satisfaz as propriedades seguintes:

$$divMod2\ (2\ n) = (n, \textsc{True}) \tag{E4}$$
$$divMod2\ (2\ n + 1) = (n, \textsc{False}) \tag{E5}$$

(Ou seja, $divMod2\ x$ dá não só a divisão inteira $x \div 2$ mas também a paridade de x.)

Encontre α em

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N}_0 \arrow[r, "divMod2"] & \mathbb{N}_0 \times \mathbb{B} \arrow[r, "\alpha^\circ"] & \mathbb{N}_0 + \mathbb{N}_0 \arrow[ll, bend left, "\beta"] \end{tikzcd}$$

tal que

$$\alpha^\circ \cdot divMod2 \cdot \beta = id \tag{E6}$$

para

$$\beta = [even\,, odd] \tag{E7}$$
$$even\ n = 2\ n \tag{E8}$$
$$odd\ n = 2\ n + 1 \tag{E9}$$

NB: proponha α e demonstre que (E6) se verifica.

Questão 5 Duas funções f e g dizem-se permutativas entre si sempre que a igualdade

$$f \cdot g \quad = \quad g \cdot f \tag{E10}$$

se verifica. Identifique os tipos mais gerais de f e g e verifique em que condições as seguintes funções são permutativas:

$$\left\{ \begin{array}{l} f = (a+) \\ g = (b+) \end{array} \right. \tag{E11}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f = \mathsf{assocr} \\ g = \mathsf{assocl} \end{array} \right. \tag{E12}$$

NB: $(+)$ é a operação de adição num qualquer tipo numérico.

Questão 6 Demonstre a lei do condicional de McCarthy que se segue

$$p \to (q \to a\ ,\ b)\ ,\ b \quad = \quad (p \wedge q) \to a\ ,\ b \tag{E13}$$

sabendo que

$$(p \wedge q)? \quad = \quad p \to q?\ ,\ i_2 \tag{E14}$$

é uma propriedade da conjunção de predicados.

Questão 7 Seja dada uma função de ordem superior α que satisfaz a propriedade:

$$\widehat{\alpha\, f} = \widehat{f} \cdot \mathsf{swap} \tag{E15}$$

Mostre, usando as propriedades da exponenciação, que

$$\alpha\ (\alpha\, f) = f$$

se verifica.

Questão 8 A função seguinte

$$\begin{array}{l} sq\ 0 = 0 \\ sq\ (n+1) = n + n + 1 + sq\ n \end{array}$$

calcula o quadrado de um número natural (em $\mathbb{N}_0$) sem fazer quaisquer multiplicações. Mostre que sq satisfaz a equação

$$sq \cdot \mathsf{in} = [\underline{0}, add] \cdot (id + id \times sq) \cdot (id + odd \times id) \cdot (id + \langle id, id \rangle) \tag{E16}$$

onde $\overline{\mathsf{add}} = (+)$, $odd\ n = 2\ n + 1$ e in é dada por:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "\underline{0}"'] & 1 + \mathbb{N}_0 \arrow[d, "\mathsf{in}=[\underline{0},\mathsf{succ}]"] & \mathbb{N}_0 \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "\mathsf{succ}"] \\ & \mathbb{N}_0 & \end{tikzcd} \tag{E17}$$
