Cálculo de Programas

3/2.º Ano de LEI/MiEI (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2023/24

Exame de Recurso — 15 de Janeiro de 2024, 14h00–16h00
Salas 1.03 + 1.07 do Edifício 2.

PROVA PRESENCIAL INDIVIDUAL SEM CONSULTA (2h)

Importante — *Ler antes de iniciar a prova:*

- *Esta prova consta de **8** questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*
- *Recomenda-se que os alunos leiam a prova antes de decidirem por que ordem querem responder às questões que são colocadas.*

Questão 1 Recorra às leis que conhece dos produtos, coprodutos e funções constantes para demonstrar a igualdade:

$$[\langle f, \underline{k}\rangle, \langle g, \underline{k}\rangle] \quad = \quad \langle [f, g], \underline{k}\rangle \qquad \text{(E1)}$$

Questão 2 Infira o tipo mais geral da função α definida por

$$\alpha = [\langle id, \mathsf{nil}\rangle, id \times \mathsf{singl}] \qquad \text{(E2)}$$

onde $\mathsf{nil}\ \_ = [\,]$ e $\mathsf{singl}\ x = [x]$. De seguida, derive desse tipo a propriedade grátis de α.

Questão 3 Seja dada uma função de ordem superior α que satisfaz a propriedade:

$$\widehat{\alpha\, f} = \widehat{f} \cdot \mathsf{swap} \qquad \text{(E3)}$$

Mostre, usando as propriedades da exponenciação, que

$$\alpha\ (\alpha\ f) = f$$

se verifica.

Questão 4 A seguinte questão apareceu num teste anterior desta disciplina:

> Considere a estrutura de dados que se segue, estudada nas aulas:
>
> *Árvores com informação de tipo A nos nós :*
>
> $\mathsf{T} = \mathsf{BTree}\ A \qquad \begin{cases} \mathsf{B}\ (X, Y) = 1 + X \times Y^2 \\ \mathsf{B}\ (g, f) = id + g \times f^2 \end{cases} \qquad \mathsf{in} = [\underline{Empty}, Node]$
>
> *Haskell:* $\mathbf{data}\ \mathsf{BTree}\ a = Empty \mid Node\ (a, (\mathsf{BTree}\ a, \mathsf{BTree}\ a))$
>
> Defina como um catamorfismo a função
>
> $f : \mathsf{BTree}\ A \to A^*$
> $f = (\!|\, g\, |\!)$
>
> isto é, identifique g tal que $f\ t$ seja o caminho a percorrer na árvore t para atingir o seu nó terminal mais à direita.

Uma das respostas que apareceram ao corrigir esse teste foi

$$g = [\mathsf{nil}\,, \pi_1 \cdot \pi_2] \tag{E4}$$

Mostre que $f = (\!|\, [\mathsf{nil}\,, \pi_1 \cdot \pi_2] \,|\!)$ é uma função constante, calculando-a usando as leis do cálculo de programas.

Questão 5 Mostre que o catamorfismo

$$k = (\!|\, (m \times n) \cdot \langle \mathsf{F}\ \pi_2, \mathsf{F}\ \pi_1 \rangle \,|\!) \tag{E5}$$

se pode decompor em duas funções f e g tal que:

$$\begin{cases} f \cdot \mathsf{in} = m \cdot \mathsf{F}\ g \\ g \cdot \mathsf{in} = n \cdot \mathsf{F}\ f \end{cases}$$

Sugestão: resolva em ordem a f e g a equação

$$\langle f, g \rangle = k$$

onde k é o catamorfismo dado.

Questão 6 Considere a seguinte generalização de um resultado que foi abordado nas aulas teórico-práticas,

$$(\!|\, g \,|\!) \cdot (\!|\, \mathsf{in}_2 \cdot \alpha \,|\!) = (\!|\, g \cdot \alpha \,|\!) \quad \Leftarrow \quad \mathsf{G}\, f \cdot \alpha = \alpha \cdot \mathsf{F}\, f \tag{E6}$$

a que corresponde o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{T}_1 \arrow[d, "(\!|\, \mathsf{in}_2 \cdot \alpha \,|\!)"'] & & \mathsf{F}\ \mathsf{T}_1 \arrow[ll, "\mathsf{in}_1"'] \arrow[d, "\mathsf{F}\ (\!|\, \mathsf{in}_2 \cdot \alpha \,|\!)"] \\
\mathsf{T}_2 \arrow[d, "(\!|\, g \,|\!)"'] & \mathsf{G}\ \mathsf{T}_2 \arrow[l, "\mathsf{in}_2"] \arrow[d, "\mathsf{G}\ (\!|\, g \,|\!)"] & \mathsf{F}\ \mathsf{T}_2 \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "\mathsf{F} (\!|\, g \,|\!)"] \\
C & \mathsf{G}\ C \arrow[l, "g"] & \mathsf{F} C \arrow[l, "\alpha"]
\end{tikzcd}$$

Apresente uma demonstração analítica de (E6).

Questão 7 Conhece com certeza, de Programação Funcional, a função:

$$\begin{cases} \mathsf{foldl} :: (b \to a \to b) \to b \to [\, a\,] \to b \\ \mathsf{foldl}\ f\ z\ [\,] = z \\ \mathsf{foldl}\ f\ z\ (h : t) = \mathsf{foldl}\ f\ (f\ z\ h)\ t \end{cases}$$

Pode mostrar-se que $\widehat{\mathsf{foldl}\ f} = \mathit{fdl}\ f$ onde

$$\begin{cases} \mathit{fdl}\ f\ (z, [\,]) = z \\ \mathit{fdl}\ f\ (z, h : t) = \mathit{fdl}\ f\ (f\ z\ h, t) \end{cases}$$

Pretendendo-se agora mostrar que $\mathit{fdl}\ f$ é um "ciclo-while disfarçado", para $f : B \to A \to B$, encontre g, h, X e Y no diagrama

$$\begin{tikzcd}
B \times A^* \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\mathit{fdl}\ f = \mathbf{tailr}\ g"'] & X \arrow[d, "id + \mathit{fdl}\ f"] \\
B & Y \arrow[l, "h"]
\end{tikzcd}$$

por forma a se ter $\mathit{fdl}\ f = \mathbf{tailr}\ g$. Justifique a sua resposta. **NB**: recorde a definição $\mathbf{tailr}\ f = [\![[id, id], f]\!]$.

Questão 8 Nas aulas mostrou-se que qualquer functor de tipo $\mathsf{T}\ A \cong A + \mathsf{F}\ (\mathsf{T}\ A)$ é um monade, para um dado F. Deu-se como exemplo o monade $\mathsf{LTree}\ A$, para o qual $\mathsf{F}\ X = X \times X$. Ora, dá-se o facto deste functor F ser também um monade, cf.

$$A \xrightarrow{u=\langle id,id\rangle} \mathsf{F}\ A \xleftarrow{\mu=\pi_1\times\pi_2} \mathsf{F}\ (\mathsf{F}\ A) \qquad \text{(E7)}$$

e de se poder usar essa informação para extrair $\mathsf{F}\ A$ a partir de $\mathsf{T}\ A$, de forma imediata:

$$f : \mathsf{T}\ A \to \mathsf{F}\ A$$
$$f = (\!|\,[\langle id, id\rangle, \pi_1 \times \pi_2]\,|\!) \qquad \text{(E8)}$$

Com base nos detalhes que abaixo se dão sobre LTree, converta o catamorfismo f para Haskell sem quaisquer combinadores *pointfree* e diga, através de um exemplo, o que a função f "faz".

Árvores com informação de tipo A nas folhas :

$$\mathsf{T} = \mathsf{LTree}\ A \qquad \begin{cases} \mathsf{B}\ (X, Y) = X + Y \times Y \\ \mathsf{B}\ (g, f) = g + f \times f \end{cases} \qquad \mathsf{in} = [Leaf\ , Fork]$$

Haskell: **data** $\mathsf{LTree}\ a = Leaf\ \ a \mid Fork\ (\mathsf{LTree}\ a, \mathsf{LTree}\ a)$